Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **35 (1980)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Eine Charakterisierung der Polyeder

Ein Polyeder wird im allgemeinen als Vereinigung von endlich vielen konvexen Polyedern definiert, ein konvexes Polyeder seinerseits als konvexe Hülle von endlich vielen Punkten. Nach dieser Definition ist jedes Polyeder $P \subset \mathbf{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt.

Verschiedene Autoren haben jedoch allgemeinere Polyeder betrachtet, die weder abgeschlossen noch beschränkt zu sein brauchen, so zum Beispiel Hadwiger in [3, 4] oder Lenz in [5].

Systematisch untersucht werden allgemeine Polyeder von Nef in [6, 7, 8], wo als Polyeder jede Menge $P \subset \mathbf{R}^n$ bezeichnet wird, die aus endlich vielen (offenen) Halbräumen durch Anwendung der Operationen «Vereinigung», «Durchschnitt» und «Komplement» (cpl) erzeugt werden kann. Gemäss dieser Definition sind Polyeder zum Beispiel die offenen (abgeschlossenen) Halbräume, Ebenen beliebiger Dimension, endliche Vereinigungen von solchen oder die (kompakten) Polyeder im herkömmlichen Sinn.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die so definierten allgemeinen Polyeder unter Verwendung des Begriffs der «relativ offenen Menge» auf einfache Weise zu charakterisieren:

Satz. *Eine Menge $P \subset \mathbf{R}^n$ ist genau dann ein (allgemeines) Polyeder, wenn sowohl P als auch* cpl P *Vereinigungen von endlich vielen relativ offenen Mengen sind.*

Dabei heisst eine Menge $M \subset \mathbf{R}^n$ relativ offen, wenn sie offen ist bezüglich der von $\mathbf{R}^n$ (mit der natürlichen Topologie versehen) auf der affinen Hülle aff$M$ von M induzierten Topologie. So ist zum Beispiel eine offene Kreisscheibe $K \subset \mathbf{R}^3$ oder eine Gerade $G \subset \mathbf{R}^3$ relativ offen, die Vereinigung zweier verschiedener Geraden $G_1, G_2 \subset \mathbf{R}^3$ jedoch nicht.

Der Beweis des Satzes stützt sich auf die folgenden Begriffe und Bezeichnungen aus [6]:

Die zu einer nichtkonstanten linearen Funktion f auf $\mathbf{R}^n$ gehörige Hyperebene werde mit F^0 bezeichnet, der zugehörige positive (negative) offene Halbraum mit F^+ (F^-). Endlich viele Hyperebenen $F_1^0, \ldots, F_r^0$ erzeugen ein «Netz» $Z = Z(F_1^0, \ldots, F_r^0)$, das aus allen «Netzebenen» besteht, die Durchschnitt eines Teilsystems von $\{F_1^0, \ldots, F_r^0\}$ sind. Die nichtleeren unter den relativ offenen, konvexen Polyedern $E = \bigcap_{i=1}^r F_i^{\sigma_i}$, mit $\sigma_i \in \{-, 0, +\}$, heissen «Elementarpolyeder zu Z» und bilden eine (endliche) Partition des $\mathbf{R}^n$. Für jede Netzebene N und jedes Elementarpolyeder E zu Z gilt $E \subset N$ oder $E \cap N = \emptyset$.

Beweis: 1. Sei $P \subset \mathbf{R}^n$ ein Polyeder. Dann ist auch cpl P ein Polyeder, und gemäss [6] (Satz 2.6; 6) gilt, dass sowohl P als auch cpl P Vereinigungen von endlich vielen relativ offenen (konvexen) Polyedern sind.

2. Umgekehrt existieren nach Voraussetzung Darstellungen $P = \bigcup_{i=1}^r A_i$ und

$\mathrm{cpl}\, P = \bigcup_{i=r+1}^{s} A_i$, wo alle A_i relativ offen sind. Jede affine Hülle $\mathrm{aff} A_i (i=1, \ldots, s)$ lässt sich als Durchschnitt von endlich vielen Hyperebenen darstellen. Sei Z das von allen diesen Hyperebenen erzeugte Netz, und sei E irgendein Elementarpolyeder zu Z. Wir zeigen, dass bezüglich der von $\mathbf{R}^n$ auf E induzierten Topologie jedes $E \cap A_i (i=1, \ldots, s)$ eine offene Teilmenge von E ist:
Wir dürfen $E \cap A_i \neq \emptyset$ annehmen. Dann ist E eine Teilmenge der Netzebene $\mathrm{aff} A_i$. A_i lässt sich darstellen als $A_i = A \cap \mathrm{aff} A_i$, mit A offen in $\mathbf{R}^n$. Aus $E \cap A_i = E \cap A \cap \mathrm{aff} A_i = E \cap A$ folgt, dass $E \cap A_i$ offen in E ist.
Wegen $E \cap P = \bigcup_{i=1}^{r} (E \cap A_i)$ und $E \cap \mathrm{cpl}\, P = \bigcup_{i=r+1}^{s} (E \cap A_i)$ erhalten wir, dass $E \cap P$ und $E \cap \mathrm{cpl}\, P$ offene Teilmengen in E sind. E ist konvex, also zusammenhängend ([2], Kap. II, §2, Nr. 6). Das heisst, dass E nicht als Vereinigung zweier nichtleerer, disjunkter, offener Teilmengen von E dargestellt werden kann ([1], Kap. I, §11, Nr. 1). Aus $E = (E \cap P) \cup (E \cap \mathrm{cpl}\, P)$ folgt daher $E \cap P = \emptyset$ oder $E \cap \mathrm{cpl}\, P = \emptyset$. Für jedes Elementarpolyeder E zu Z gilt also $E \subset P$ oder $E \cap P = \emptyset$ und analog bezüglich $\mathrm{cpl}\, P$. Da die Elementarpolyeder zu Z eine Partition des $\mathbf{R}^n$ bilden, sind P und $\mathrm{cpl}\, P$ je Vereinigung der in ihnen enthaltenen (endlich vielen) Elementarpolyeder. Das heisst, P und $\mathrm{cpl}\, P$ sind Polyeder.

Korollar. *Eine abgeschlossene Menge $P \subset \mathbf{R}^n$ ist genau dann ein (abgeschlossenes) Polyeder, wenn P Vereinigung von endlich vielen relativ offenen Mengen ist.*

Beweis: $\mathrm{cpl}\, P$ ist offen, also auch relativ offen. Damit folgt das Korollar unmittelbar aus dem Satz.

VERDANKUNG

Der Verfasser dankt W. Nef herzlich für die anregenden Gespräche im Zusammenhang mit dieser Arbeit.

Hanspeter Bieri, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 N. Bourbaki: Eléments de mathématique. Topologie générale. Hermann, Paris 1961.
2 N. Bourbaki: Eléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques. Hermann, Paris 1966.
3 H. Hadwiger: Notiz zur Eulerschen Charakteristik offener und abgeschlossener euklidischer Polyeder. Studia Scient. Math. Hung. *4*, 385–387 (1969).
4 H. Hadwiger: Erweiterter Polyedersatz und Euler-Shephardsche Additionstheoreme. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg *39*, 120–129 (1973).
5 H. Lenz: Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg *34*, 135–147 (1970).
6 W. Nef: Beiträge zur Theorie der Polyeder, mit Anwendungen in der Computergraphik. Herbert Lang, Bern 1978.
7 W. Nef: Zur Eulerschen Charakteristik allgemeiner, insbesondere konvexer Polyeder. Resultate Math. *3*, 64–69 (1980).
8 W. Nef: Eulers Charakteristik und die Beschränktheit konvexer Polyeder. J. reine angew. Math. *314*, 72–83 (1980).

A sequence of inequalities for certain sets of concurrent cevians

1. Leuenberger [1, 2] has established the sequence

$$\sum h_a \le \sum w_a \le \sum m_a \qquad \left(\sum t_a = t_a + t_b + t_c\right)$$

of sets of concurrent cevians, where h_a, w_a, m_a denote the altitude, internal angle-bisector, and median, respectively, from the vertex A, of a triangle ABC. In this paper we expand the above sequence to include the Gergonne and Nagel cevians, in addition, we derive an inequality believed to be new.

2. Denote the Gergonne and Nagel cevians from vertex A by g_a and n_a, respectively.

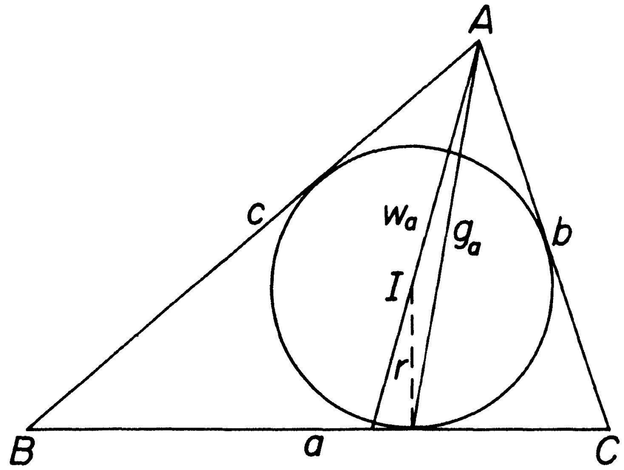

Figure 1

From figure 1

$$g_a \le AI + r \le w_a,$$

where r denotes the in-radius of the triangle ABC, we have immediately

$$\sum g_a \le \sum AI + 3r \le \sum w_a .$$

Applying the inequality $\sum AI \le 2(R+r)$ (see [4], p. 103) to $\sum g_a \le \sum AI + 3r$, we obtain

$$\sum g_a \le 2R + 5r,$$

an inequality which we have not previously seen. Since, obviously, $\sum h_a \le \sum g_a$, we now have

$$\sum h_a \le \sum g_a \le \sum w_a . \tag{1}$$

3. We next assume, without loss of generality, that $a \le b \le c$.

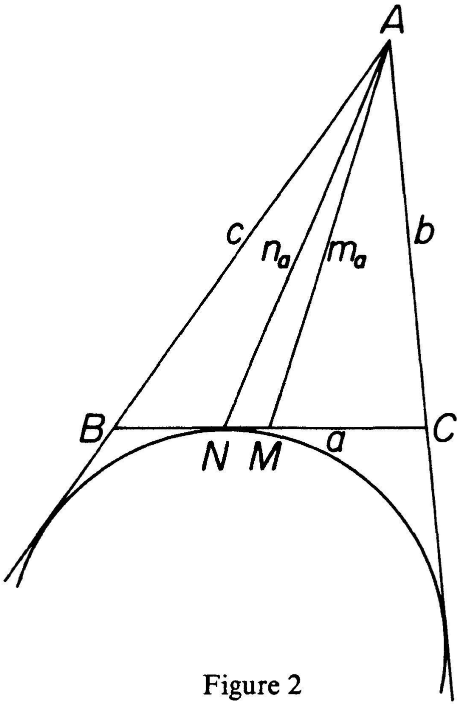

Figure 2

From figure 2, $BN = s - c$ [1]) and $BM = a/2$. For $b \leq c$, we have $BN \leq BM$ and, consequently, $m_a \leq n_a$. In a similar manner, it is easily seen that $m_b \leq n_b$ and $m_c \leq n_c$; hence,

$$\sum m_a \leq \sum n_a. \tag{2}$$

Combining (1) and (2) with Leuenberger's sequence, we obtain

$$\sum h_a \leq \sum g_a \leq \sum w_a \leq \sum m_a \leq \sum n_a,$$

with equality if and only if the triangle is equilateral.

Roland H. Eddy, Memorial University of Newfoundland, St. John's, Canada

REFERENCES

1 F. Leuenberger: Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel. El. Math. *16*, 127–129 (1961).
2 F. Leuenberger: Notiz zu einem System von Grössenrelationen im Dreieck. El. Math. *19*, 132–133 (1964).
3 W.J. Blundon and R.H. Eddy: Problem 478. Nieuw Arch. v. Wisk. *2*, 354–355 (1978).
4 O. Bottema, R.Z. Djordjević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović and P.M. Vasić: Geometric Inequalities. Walters-Noordhoff, Groningen 1969.

1) $2s = a + b + c$.