Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1981)
Heft: 4

Artikel: Zur Charakterisierung des Skalarproduktes
Autor: Rätz, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35547

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Charakterisierung des Skalarproduktes

Herrn Prof. Dr. E. Trost zum 70. Geburtstag gewidmet

1. J. Aczél ([1], S. 310, Satz 1; [2], S. 27–28) charakterisierte unter anderem das Skalarprodukt von $\boldsymbol{R}^3$ auf elementargeometrische Weise und durch Lösung einer Funktionalgleichung. In dieser Note wird für dieselbe Art von Fragestellung von einigen elementaren Fakten der Theorie der Skalarprodukträume ausgegangen, die Loslösung von der Dimension 3 vollzogen, der komplexe Fall mitbehandelt und eine Ausnahmesituation in $\boldsymbol{R}^2$ herausgestellt (Korollar 4). Zentral ist hier die Tatsache, dass aus der Drehungsinvarianz und drei Vierteln der Forderung der Sesquilinearität auf die volle Sesquilinearität geschlossen werden kann (Satz 1c).

2. Durchwegs bezeichne $\boldsymbol{K}$ den Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen oder den Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen, ferner $\bar{\cdot}:\boldsymbol{K}\to\boldsymbol{K}$ die identische Abbildung, falls $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, bzw. die gewöhnliche Konjugation, falls $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$. Ist X ein $\boldsymbol{K}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to\boldsymbol{K}$ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform (im Falle $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ ist sie nach der obigen Konvention über $\bar{\cdot}:\boldsymbol{K}\to\boldsymbol{K}$ eine symmetrische Bilinearform), so ist $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein *Skalarproduktraum* (inner product space, pre-Hilbert space) über $\boldsymbol{K}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein *Skalarprodukt* auf X. Mit $SU(X,2)$ bezeichnen wir schliesslich die Menge aller linearen Isometrien $T: X\to X$ mit einem 2-dimensionalen invarianten Unterraum M der folgenden Art: Die Restriktion $(T|M): M\to M$ von T ist eine eigentliche Drehung von M, d.h. hat Determinante 1 ([4], S. 110, 113), in Zeichen $T|M\in SU(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, und $Tx=x$ für alle x des orthogonalen Komplementes $M^\perp$ von M.

3. Grundtatsachen über Skalarprodukträume:

(A) Sind $m\in\boldsymbol{N}$ und $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein m-dimensionaler Skalarproduktraum über $\boldsymbol{K}$, so ist M skalarprodukttreu abbildbar auf (d.h. isomorph zu) $\boldsymbol{K}^m$ mit dem Standardskalarprodukt $((\xi_1,\dots,\xi_m),(\eta_1,\dots,\eta_m))\mapsto\xi_1\bar{\eta}_1+\cdots+\xi_m\bar{\eta}_m$ ([3], S. 55). Insbesondere ist M vollständig.

(B) Ist $\dim_{\boldsymbol{K}}(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)=2$, so vermittelt jede orthonormale Basis von M in bekannter Weise eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge $SU(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ (vgl. **2**) und der Menge $SU(2,\boldsymbol{K})$ aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha,\beta\in\boldsymbol{K}, \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1,$$

d.h. der speziellen unitären 2×2-Matrizen; im Falle $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ sind es die speziellen orthogonalen 2×2-Matrizen ([4], S. 6, 117, 324). Zur Entlastung der Symbolik werden wir bei vorgegebener orthonormaler Basis Abbildung und Matrix identifizieren.

(C) Für jeden endlichdimensionalen linearen Unterraum M von $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt die direkte Zerlegung $X=M\oplus M^\perp$ ([3], S. 70).

(D) Sind M ein linearer Unterraum von $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $X=M\oplus M^\perp$ und $V: M\to M$, $W: M^\perp\to M^\perp$ lineare Isometrien, so ist $T: X\to X$ gemäss $T(x_1+x_2):=Vx_1+Wx_2$ $(x_1\in M, x_2\in M^\perp)$ eine lineare Isometrie.

(E) Sind $\dim_{\boldsymbol{K}}(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)\geq 2$ und $e,e'\in X$, $\|e\|=\|e'\|=1$, so gibt es einen 2-dimensionalen Unterraum M von X mit $e,e'\in M$ und ein $T\in SU(X,2)$ mit $T(M)=M$ und $Te=e'$.

4. Satz 1. *Voraussetzungen: 1.* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *sei ein endlich- oder unendlichdimensionaler Skalarproduktraum über* $\boldsymbol{K}$. *2. Die Abbildung* $g:X\times X\to\boldsymbol{K}$ *habe die Eigenschaften*
(i) $g(Tx,Ty)=g(x,y)$ *für alle* $x,y\in X$ *und alle* $T\in SU(X,2)$,
(ii) $g(x_1+x_2,y)=g(x_1,y)+g(x_2,y)$ *für alle* $x_1,x_2,y\in X$,
(iii) $g(\lambda x,y)=\lambda g(x,y)$ *für alle* $x,y\in X$ *und alle* $\lambda\in\boldsymbol{K}$,
(iv) $g(x,\lambda y)=\bar{\lambda}g(x,y)$ *für alle* $x,y\in X$ *und alle* $\lambda\in\boldsymbol{K}$.

Behauptungen:
a) Aus $\dim_{\boldsymbol{K}}X\neq 2, x,y\in X$ *und* $\langle x,y\rangle=0$ *folgt* $g(x,y)=0$.
b) Aus $e,e'\in X$, $\|e\|=\|e'\|=1$ *folgt* $g(e,e)=g(e',e')$.
c) $g(x,y_1+y_2)=g(x,y_1)+g(x,y_2)$ *für alle* $x,y_1,y_2\in X$, *d.h.* g *ist sesquilinear.*
d) ist $\dim_{\boldsymbol{K}}X\neq 2$, *so gibt es* $\gamma\in\boldsymbol{K}$ *mit* $g(x,y)=\gamma\langle x,y\rangle$ *für alle* $x,y\in X$.

Beweis: 1. Für $\dim_{\boldsymbol{K}}X=0$ ist g nach (ii) konstant Null, und die Behauptungen sind trivialerweise richtig. Für $\dim_{\boldsymbol{K}}X=1$ ist X nach (A) isomorph zu $\boldsymbol{K}^1$, und mit (iii), (iv) folgt $g(x,y)=x\bar{y}\cdot g(1,1)=g(1,1)\cdot\langle x,y\rangle$, woraus sich a bis d sofort ergeben. (i) ist hier erfüllt, aber inhaltslos, da $SU(X,2)=\emptyset$. - 2. Es sei $\dim_{\boldsymbol{K}}X\geq 2$. a) Es seien $x,y\in X$, $\langle x,y\rangle=0$ und $b_1,b_2,b_3\in X$ orthonormal mit x in der linearen Hülle $\operatorname{lin}\{b_1\}$ von $\{b_1\}$, $y\in M:=\operatorname{lin}\{b_2,b_3\}$, also $x\in M^{\perp}$, ferner $V:M\to M$, $Vx_1=-x_1\,(x_1\in M)$, $W:M^{\perp}\to M^{\perp}$, $Wx_2=x_2\,(x_2\in M^{\perp})$. Wird $T:X\to X$ gemäss (C), (D) aus V und W gebildet, so ist $T\in SU(X,2)$, und mit (i), (iv) ergibt sich $g(x,y)=g(Tx,Ty)=g(Wx,Vy)=g(x,-y)=-g(x,y)$, also $g(x,y)=0$. - b) folgt aus (i) und (E). - c) Es seien $x,y_1,y_2\in X$ beliebig. *Fall 1:* y_1,y_2 linear abhängig, etwa $y_2=\mu y_1$ mit passendem $\mu\in\boldsymbol{K}$, und mit (iv) folgt $g(x,y_1+y_2)=g(x,y_1)+g(x,y_2)$. *Fall 2:* y_1,y_2 linear unabhängig, $M:=\operatorname{lin}\{y_1,y_2\}$. Es seien $z_1:=(1/\|y_1\|)y_1, z_2:=(1/\|y_2\|)y_2$, also $z_1,z_2\in M$, $\|z_1\|=\|z_2\|=1$. Nach (E) gibt es $T\in SU(X,2)$ mit $T(M)=M$ und $Tz_2=z_1$. Für $\lambda:=\|y_2\|/\|y_1\|$ gilt also $\lambda\in\boldsymbol{R}, Ty_2=\lambda y_1$. I bezeichne die identische Abbildung von M, und $V:=(T|M):M\to M$. Bezüglich einer orthonormalen Basis von M gilt im Sinne von (B)

$$V=\begin{pmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad |\alpha|^2+|\beta|^2=1.$$

Wäre $(\operatorname{Re}\alpha)^2=1$, so wäre $V=\pm I$, also $\lambda y_1=Ty_2=Vy_2=\pm y_2$, was im Falle 2 ausgeschlossen wurde. Somit ist $(\operatorname{Re}\alpha)^2<1$ und daher $\det(I+\lambda V)=1+2\lambda\operatorname{Re}\alpha+\lambda^2>0$. Mit $\det(I+\lambda V)=\varepsilon^2$ gilt $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$,

$$S:=\frac{1}{\varepsilon}(I+\lambda V)\in SU(2,K),\qquad S^{-1}=\frac{1}{\varepsilon}(I+\lambda V^{-1}).\tag{1}$$

Im Sinne von (B) gilt also $S,S^{-1}\in SU(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Wird $R:X\to X$ definiert durch $R(x_1+x_2)=Sx_1+x_2\,(x_1\in M,x_2\in M^{\perp})$, so ist nach (C), (D) $R\in SU(X,2)$, R bijektiv und

$$R|M=S,\qquad R^{-1}|M=S^{-1}.\tag{2}$$

Fall 2a: $x \in M$. Aus (i), (ii), (iii), (iv), (1), (2) ergibt sich $g(x,y_1)+g(x,y_2)=g(x,y_1)+g(Tx,Ty_2)=g(x,y_1)+g(Vx,\lambda y_1)=g(x,y_1)+g(\lambda Vx,y_1)=g\big((I+\lambda V)x,y_1\big)=\varepsilon g(Sx,y_1)=\varepsilon g(Rx,y_1)=\varepsilon g(x,R^{-1}y_1)=\varepsilon g(x,S^{-1}y_1)=g\big(x,(I+\lambda V^{-1})y_1\big)=g\big(x,y_1+V^{-1}(\lambda y_1)\big)=g\big(x,y_1+T^{-1}(\lambda y_1)\big)=g(x,y_1+y_2)$, also die Behauptung c. – *Fall 2b:* $x \notin M$. Wegen $\dim_{\boldsymbol{K}} M=2$ ist nun $\dim_{\boldsymbol{K}} X \geq 3$. Nach (C) gibt es $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$ mit $x=x_1+x_2$. Wegen $y_1,y_2 \in M$ ist $\langle x_2,y_1\rangle=0, \langle x_2,y_2\rangle=0, \langle x_2,y_1+y_2\rangle=0$, also nach Behauptung a

$$g(x_2,y_1)+g(x_2,y_2)=0=g(x_2,y_1+y_2).$$

Nach Fall 2a ist $g(x_1,y_1)+g(x_1,y_2)=g(x_1,y_1+y_2)$, also insgesamt nach (ii) $g(x,y_1)+g(x,y_2)=g(x,y_1+y_2)$, womit c vollständig bewiesen ist. – d) Es seien $x,y \in X$ beliebig. Es existieren $b_1,b_2 \in X$ orthonormal mit $x=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2, y=\mu_1 b_1+\mu_2 b_2$. Aus den Behauptungen c, a und b folgt für $\gamma := g(b_1,b_1)$: $g(x,y)=\lambda_1\bar{\mu}_1 g(b_1,b_1)+\lambda_1\bar{\mu}_2 g(b_1,b_2)+\lambda_2\bar{\mu}_1 g(b_2,b_1)+\lambda_2\bar{\mu}_2 g(b_2,b_2)=\lambda_1\bar{\mu}_1 g(b_1,b_1)+\lambda_2\bar{\mu}_2 g(b_2,b_2)=\lambda_1\bar{\mu}_1\gamma+\lambda_2\bar{\mu}_2\gamma=\gamma\langle x,y\rangle$.

5. Bemerkung 1. Man findet für $\dim_{\boldsymbol{K}} X \geq 2$ leicht Beispiele von Abbildungen $g: X \times X \to \boldsymbol{K}$, welche zeigen, dass Behauptung c nicht aus (ii), (iii), (iv) allein folgt. Für eine Ersatzvoraussetzung für (i) im Rahmen der Theorie der Semiskalarprodukte vgl. [5], S. 32, Theorem 3.

Bemerkung 2. Da für jedes feste $\gamma \in \boldsymbol{K}$ die Abbildung $(x,y) \mapsto \gamma\langle x,y\rangle$ in der Rolle von g die Eigenschaften (i) bis (iv) besitzt ((i) sogar für alle linearen Isometrien $T: X \to X$), so charakterisieren (i) bis (iv) das Skalarprodukt im Falle $\dim_{\boldsymbol{K}} X \neq 2$ bis auf eine multiplikative Konstante (Satz 1d; vgl. auch [1], S. 310, Satz 1). Für den bisher noch nicht erledigten Fall $\dim_{\boldsymbol{K}} X=2$ (vgl. Satz 1a, d) genügt es nach (A), den Isomorphieprototypen $\boldsymbol{K}^2$ mit dem Standardskalarprodukt zu betrachten. Nach Satz 1c muss g auch hier sesquilinear, jedoch nach Bemerkung 3 nicht unbedingt hermitesch sein.

Lemma 2. *Die durch* $g\big((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\big)=(\xi_1\ \xi_2)\cdot A\cdot(\bar{\eta}_1\ \bar{\eta}_2)^{\mathrm{tr}}$ *gegebene Sesquilinearform* $g: \boldsymbol{K}^2 \times \boldsymbol{K}^2 \to \boldsymbol{K}$ *erfüllt (i) genau dann, wenn die* 2×2*-Matrix* A *mit allen* T *aus* $SU(2,\boldsymbol{K})$ *kommutiert.*

Beweis: (i) gilt genau dann, wenn $(\xi_1\ \xi_2)\cdot T\cdot A\cdot \bar{T}^{\mathrm{tr}}\cdot(\bar{\eta}_1\ \bar{\eta}_2)^{\mathrm{tr}}=(\xi_1\ \xi_2)\cdot A\cdot(\bar{\eta}_1\ \bar{\eta}_2)^{\mathrm{tr}}$ für alle $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2 \in \boldsymbol{K}$ und alle $T \in SU(2,\boldsymbol{K})$ gilt, und dies ist gleichwertig mit $TA\bar{T}^{\mathrm{tr}}=A$, d. h. mit $TAT^{-1}=A$, also mit $TA=AT$ für alle $T \in SU(2,\boldsymbol{K})$.

Korollar 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gibt es im Falle* $X=\boldsymbol{C}^2$ *ein* $\gamma \in \boldsymbol{C}$ *mit* $g(x,y)=\gamma\langle x,y\rangle$ *für alle* $x,y \in X$.

Beweis: Nach Lemma 2 muss A mit den Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ aus $SU(2,\boldsymbol{C})$ kommutieren und hat somit die Gestalt $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, woraus die Behauptung folgt.

Korollar 4. *Im Falle $X=\boldsymbol{R}^2$ erfüllt $g:\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ genau dann die Bedingungen (i) bis (iv) von Satz 1, wenn es $\gamma,\delta\in\boldsymbol{R}$ gibt mit*

$$g\big((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\big)=\gamma\,(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)+\delta\,(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$$

für alle $(\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$.

Beweis: Genau die Matrizen der Form $\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ -\delta & \gamma\end{pmatrix}$ $(\gamma,\delta\in\boldsymbol{R})$ kommutieren mit allen T aus $SU(2,\boldsymbol{R})$. Nun folgt die Behauptung aus Lemma 2 und Satz 1c.

Bemerkung 3. Nach Korollar 3 gelten für $X=\boldsymbol{C}^2$ die Analoga zu Satz 1a,d. Nach Korollar 4 ist dies nicht der Fall für $X=\boldsymbol{R}^2$, und g ist nicht unbedingt symmetrisch oder schiefsymmetrisch. Verschärft man (i) jedoch zur Invarianz gegenüber allen Drehungen von $\boldsymbol{R}^2$, so folgt $g\big((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\big)=\gamma\,(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)$ für alle (ξ_1,ξ_2), $(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$.

Jürg Rätz, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Aczél: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *3*, 309–316 (1952).
2 J. Aczél: Lectures on Functional Equations and their Applications. Academic Press, New York, San Francisco, London 1966.
3 S.K. Berberian: Introduction to Hilbert Space. Oxford University Press, New York 1961.
4 P. Klein und W. Klingenberg: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Bd.2. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1972.
5 G. Lumer: Semi-inner-product spaces. Trans. Am. Math. Soc. *100*, 29–43 (1961).

Elementarmathematik und Didaktik

Gitterwege

1. Zahlreiche kombinatorische Aufgaben gestatten eine anschauliche Interpretation im ebenen Gitter. In der Regel geht es darum, die Anzahl der Gitterwege der Länge $m+n$ von (0,0) nach (m,n) $(m,n\in\mathbf{N}_0)$ unter Einhalten gewisser Nebenbedingungen zu bestimmen; gelegentlich findet man dabei kombinatorische Identitäten, deren Nachweis auf anderem Wege komplizierter ist.
Bekannt sind die folgenden Ergebnisse ([1], S. 135–151, [2]):

a) Die Anzahl aller Wege beträgt

$$a(m,n)=\binom{m+n}{m}. \tag{1}$$

b) Die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=(1/k)\,x$ $(k\in\mathbf{N})$ nicht überschreiten, ist

$$b(m,n)=\binom{m+n}{m}-k\binom{m+n}{m+1}=\frac{m-kn+1}{m+1}\binom{m+n}{m},\qquad m\geq kn. \tag{2}$$