Gitterwege

Autor(en): **Binz, J.C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 4

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35548

Korollar 4. *Im Falle $X=\boldsymbol{R}^2$ erfüllt $g:\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ genau dann die Bedingungen (i) bis (iv) von Satz 1, wenn es $\gamma,\delta\in\boldsymbol{R}$ gibt mit*

$$g\left((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\right)=\gamma\,(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)+\delta\,(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$$

für alle $(\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$.

Beweis: Genau die Matrizen der Form $\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ -\delta & \gamma\end{pmatrix}$ $(\gamma,\delta\in\boldsymbol{R})$ kommutieren mit allen T aus $SU(2,\boldsymbol{R})$. Nun folgt die Behauptung aus Lemma 2 und Satz 1c.

Bemerkung 3. Nach Korollar 3 gelten für $X=\boldsymbol{C}^2$ die Analoga zu Satz 1a,d. Nach Korollar 4 ist dies nicht der Fall für $X=\boldsymbol{R}^2$, und g ist nicht unbedingt symmetrisch oder schiefsymmetrisch. Verschärft man (i) jedoch zur Invarianz gegenüber allen Drehungen von $\boldsymbol{R}^2$, so folgt $g\left((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\right)=\gamma\,(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)$ für alle (ξ_1,ξ_2), $(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$.

Jürg Rätz, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Aczél: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *3*, 309-316 (1952).
2 J. Aczél: Lectures on Functional Equations and their Applications. Academic Press, New York, San Francisco, London 1966.
3 S.K. Berberian: Introduction to Hilbert Space. Oxford University Press, New York 1961.
4 P. Klein und W. Klingenberg: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Bd.2. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1972.
5 G. Lumer: Semi-inner-product spaces. Trans. Am. Math. Soc. *100*, 29-43 (1961).

Elementarmathematik und Didaktik

Gitterwege

1. Zahlreiche kombinatorische Aufgaben gestatten eine anschauliche Interpretation im ebenen Gitter. In der Regel geht es darum, die Anzahl der Gitterwege der Länge $m+n$ von (0,0) nach (m,n) $(m,n\in\mathrm{N}_0)$ unter Einhalten gewisser Nebenbedingungen zu bestimmen; gelegentlich findet man dabei kombinatorische Identitäten, deren Nachweis auf anderem Wege komplizierter ist.
Bekannt sind die folgenden Ergebnisse ([1], S. 135-151, [2]):

a) Die Anzahl aller Wege beträgt

$$a(m,n)=\binom{m+n}{m}. \tag{1}$$

b) Die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=(1/k)x$ $(k\in\mathrm{N})$ nicht überschreiten, ist

$$b(m,n)=\binom{m+n}{m}-k\binom{m+n}{m+1}=\frac{m-kn+1}{m+1}\binom{m+n}{m},\qquad m\geq kn. \tag{2}$$

c) Die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=x+p\,(p\in\mathbf{N}_0)$ nicht überschreiten, beträgt

$$c(m,n)=\binom{m+n}{m}-\binom{m+n}{m+p+1}, \qquad m\geq n-p. \tag{3}$$

In dieser Note werden zwei in der obigen Zusammenstellung noch fehlende Probleme elementar gelöst.
Es bedeuten $d(m,n)$ die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=(1/k)x+p$ $(k\in\mathbf{N},p\in\mathbf{N}_0)$ nicht überschreiten, und $e(m,n)$ die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=kx+p\,(k\in\mathbf{N},p\in\mathbf{N}_0)$ nicht überschreiten. Es gelingt, $d(m,n)$ und $e(m,n)$ nur mit Hilfe von (1) und (2) zu berechnen.
2. Zur Bestimmung der $d(m,n)$ unterteilen wir die Menge V der verbotenen Wege in disjunkte Teilmengen, $V=V_1+V_2+\cdots+V_{n-p}$; V_i ist die Menge der Wege, welche die Gerade $g{:}\,ky-x-p=0$ letztmals im Punkt $(ki,i+p)$ überschreiten.
Mit (1) und (2) erhalten wir unmittelbar

$$|V_i|=\binom{(k+1)i+p-1}{ki-1}\binom{m+n-p-(k+1)i}{m-ki}\frac{m+1-k(n-p)}{m+1-ki}$$

und damit

$$d(m,n)=\binom{m+n}{m}-\sum_{i=1}^{n-p}\frac{m+1-k(n-p)}{m+1-ki}\binom{(k+1)i+p-1}{i+p}\binom{m+n-p-(k+1)i}{n-(i+p)},$$
$$m\geq k(n-p). \tag{4}$$

Der Vergleich zwischen (2) und (4) für $p=0$ führt auf die Identität

$$\frac{kn}{m+1}\binom{m+n}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m+1-kn}{m+1-ki}\binom{(k+1)i+1}{i}\binom{m+n-(k+1)i}{n-i},$$
$$m\geq kn, \qquad n\geq 1. \tag{5}$$

3. Auch zur Berechnung der $e(m,n)$ unterteilen wir die Menge V der verbotenen Wege in disjunkte Teilmengen,

$$V=V_1+V_2+\cdots+V_t, \qquad t=\left[\frac{n-1-p}{k}\right];$$

diesmal ist aber V_i die Menge der Wege, welche die Gerade $g{:}\,y=kx+p$ erstmals im Punkt $(i,ki+p)$ überschreiten. Mit den Setzungen $e(0,0)=1$ und $e_i=e(i,ki+p)$ erhalten wir

$$|V_i|=e_i\binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i}$$

und damit vorerst

$$e(m,n)=\binom{m+n}{m}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1-p}{k}\right]} e_i\binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i}; \tag{6}$$

es bleiben nur noch die e_i zu berechnen.

W sei die Menge der zulässigen Wege von (0,0) nach $(i,ki+p)$, also $|W|=e_i$. Daneben betrachten wir die Menge W' der Gitterwege der Länge $(k+1)i+p$ von (0,0) nach $(ki+p,i)$, welche die Gerade $g':y=(1/k)x$ nicht überschreiten. Nach (2) ist

$$|W'|=\frac{p+1}{ki+p+1}\binom{(k+1)i+p}{i}.$$

Zwischen W und W' stellen wir mit der Abbildung $f(x,y)=(ki+p-y,i-x)$ eine Zuordnung her. Die Abbildung f ist offensichtlich bijektiv und gitterpunktstreu und führt horizontale (vertikale) Gitterstrecken in vertikale (horizontale) über; wegen $y\leq kx+p$ wird $i-x\leq(ki+p-y)/k$, und schliesslich gelten $f(0,0)=(ki+p,i)$ und $f(i,ki+p)=(0,0)$.

Somit ist $e_i=|W'|$, und wir haben das Ziel erreicht:

$$e(m,n)=\binom{m+n}{m}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1-p}{k}\right]}\frac{p+1}{ki+p+1}\binom{(k+1)i+p}{i}\binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i},$$
$$km\geq n-p. \tag{7}$$

Der Vergleich zwischen (7) im Spezialfall $k=1$ und (3) führt auf die Identität

$$\binom{m+n}{m+p+1}=\sum_{i=0}^{n-1-p}\frac{p+1}{p+1+i}\binom{p+2i}{i}\binom{m+n-1-p-2i}{m-2i},$$
$$m\geq n-p\geq 1. \tag{8}$$

Schliesslich vergleichen wir (8) für $p=0$ und (5) für $k=1$ und gewinnen die Identität

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+i}\binom{2i}{i}\binom{m+n-1-2i}{m-i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m-n+1}{m-i+1}\binom{2i-1}{i}\binom{m+n-2i}{n-i},$$
$$m\geq n\geq 1. \tag{9}$$

J.C. Binz, Mathematisches Institut der Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Bd. 1. Stuttgart 1973.
2 J. Binz: Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen. El. Math. *32*/3 (1977).