

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1982)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Représentation conforme et symétries : une détermination élémentaire du module d'un quadrilatère en forme de L  
**Autor:** Hersch, Joseph  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36385>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 37

Heft 1

Seiten 1–32

Basel, 10. Januar 1982

## Représentation conforme et symétries: une détermination élémentaire du module d'un quadrilatère en forme de $L$

### 1. Introduction

1.1. Dans le cadre du «Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach», une semaine a été consacrée, en juillet 1980, aux méthodes constructives de l'analyse complexe. A la suite d'un exposé de G.T. Symm, j'ai appris que le quadrilatère  $O C D E$ , dessiné à la figure 3, a un module égal à  $\sqrt{3}$ : D. Gaier l'a obtenu [1] à l'aide d'intégrales elliptiques. Ce module étant si simple, j'ai cherché une méthode tout à fait élémentaire pour le déterminer: c'est celle que je propose ici. A côté de la notion de *module* d'un *quadrilatère*, cette méthode nécessite celle de *mesure harmonique* d'un arc-frontière en un point d'un domaine. Rappelons d'abord ces deux notions.

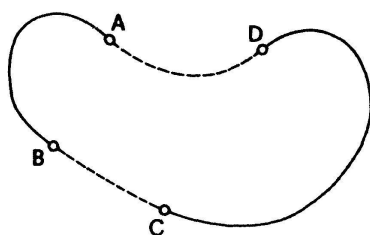


Fig. 1: quadrilatère.

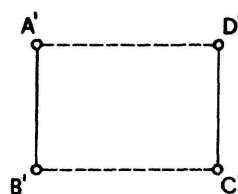


Fig. 1'.

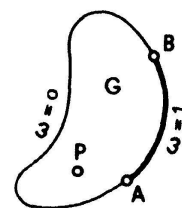


Fig. 2.

1.2. Un *quadrilatère*  $Q$  est un domaine de Jordan avec quatre points  $A, B, C, D$  désignés sur sa frontière (fig. 1).

Son *module*  $\mu_{AB,CD} = |B'C'|/|A'B'|$  est le rapport des côtés d'un rectangle  $A'B'C'D'$  qui lui est conformément équivalent (fig. 1'). Comme  $\mu_{AD,BC} = |A'B'|/|B'C'|$ , on a toujours

$$\mu_{AB,CD} \cdot \mu_{AD,BC} = 1. \quad (1)$$

Au point de vue physique,  $\mu_{AB,CD}$  est (à un facteur constant près) la *résistance* d'une plaque homogène entre les «électrodes»  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{CD}$ , isolée le long des arcs  $\widehat{BC}$  et  $\widehat{AD}$ .

Nous utiliserons essentiellement que *le module d'un quadrilatère est un invariant conforme*.

1.3. Soient  $G$  un domaine de Jordan (fig.2),  $P$  un point intérieur,  $A$  et  $B$  deux points sur la frontière  $\partial G$ . On appelle *mesure harmonique* de l'arc-frontière  $\widehat{AB}$  au point  $P$  la valeur en  $P$  de la fonction harmonique (bornée) dans  $G$ , qui vaut 1 sur l'arc  $\widehat{AB}$  et 0 sur le reste de la frontière  $\partial G$ . On l'écrit  $\omega(P; \widehat{AB}; G)$  ou plus brièvement  $\omega(P; \widehat{AB})$ .

## 2. Une propriété de «symétrie généralisée» [2] du quadrilatère en $L$ considéré

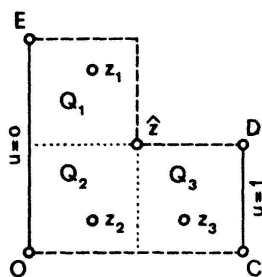


Fig. 3: on cherche le module  $\mu$  de ce quadrilatère.

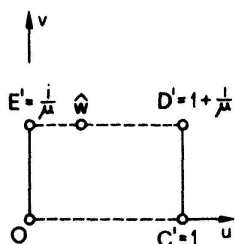


Fig. 3': module =  $\mu$ .

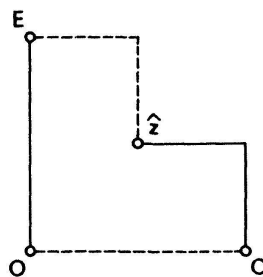


Fig. 4: module = 1.

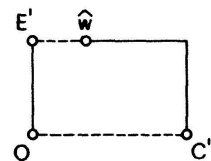


Fig. 4': module = 1.

Appelons  $u = u(z)$  la fonction harmonique dans notre quadrilatère  $O C D E$  (fig.3), qui prend les valeurs 0 et 1 sur les arcs-frontière  $\widehat{EO}$  resp.  $\widehat{CD}$ , et dont la dérivée normale s'annule sur les arcs-frontière en pointillé - - - - -.

Soient  $z_1$  un point quelconque du carré supérieur  $Q_1$ ,  $z_2$  son symétrique dans  $Q_2$  et  $z_3$  le symétrique de  $z_2$  dans  $Q_3$ . Alors

$$u(z_1) + u(z_2) + u(z_3) = 1 \quad (2)$$

quel que soit  $z_1 \in Q_1$ .

Démonstration: La fonction  $\tilde{u}(z_1) := u(z_1) + u(z_2) + u(z_3)$  est définie et harmonique dans  $Q_1$ , elle vaut 1 sur le côté gauche de  $Q_1$  et sa dérivée normale s'annule sur les trois autres segments de  $\partial Q_1$ . C'est donc la constante 1, c.q.f.d.

Pour  $z_1 \rightarrow \hat{z}$  (fig. 3), nous avons aussi  $z_2 \rightarrow \hat{z}$  et  $z_3 \rightarrow \hat{z}$ , d'où

$$u(\hat{z}) = \frac{1}{3}. \quad (2')$$

### 3. La représentation conforme de notre quadrilatère sur un rectangle de côtés 1 et $1/\mu$ . Une caractérisation de $\mu$ par une condition sur le module d'un autre quadrilatère

Nous écrirons désormais  $\mu$  pour  $\mu_{EO,CD}$ .

La fonction harmonique  $u(z)$  considérée au paragraphe 2 est la partie réelle de la fonction  $w(z) = u(z) + i v(z)$  qui applique conformément notre quadrilatère  $O C D E$  sur le rectangle  $0 < u < 1$ ,  $0 < v < 1/\mu$  (fig. 3'), avec  $w(O) = 0$ ,  $w(C) = C' = 1$ ,  $w(D) = D' = 1 + i/\mu$ ,  $w(E) = E' = i/\mu$ . De plus, par (2'),  $\hat{w} := w(\hat{z}) = 1/3 + i/\mu$ .

Considérons maintenant, dans notre domaine en  $L$ , un autre quadrilatère: on désigne, sur la frontière, les points  $O, C, \hat{z}, E$  (fig. 4). Ce quadrilatère étant symétrique relativement à la diagonale  $O\hat{z}$ , son module  $\mu_{EO,C\hat{z}}$  est égal à son «module inverse»  $\mu_{OC,\hat{z}E}$ , donc [cf. (1)] égal à 1. – Comme le module est un invariant conforme, l'image de ce quadrilatère par l'application  $w(z)$ , c'est-à-dire le quadrilatère  $O C' \hat{w} E'$  (fig. 4'), a lui aussi le module 1.

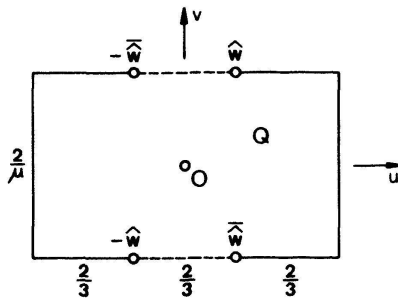


Fig. 5: le quadrilatère  $Q$ , de module 1.

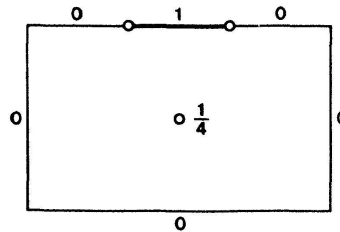


Fig. 6': la fonction harmonique  $h$ .

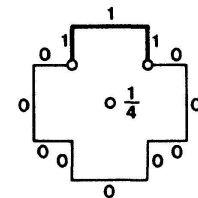


Fig. 6: fonction harmonique.

Il s'ensuit que le quadrilatère  $Q$  de la figure 5, obtenu par deux symétries successives, a aussi le module 1, c'est-à-dire qu'il est conformément équivalent à un carré. C'est cette condition qui déterminera  $\mu$ . Le passage de la figure 4' à la figure 5 peut être interprété ainsi: on a quatre résistances égales à 1,  $R_1 + R_2 = 2$  (connectées en série) et  $R_3 + R_4 = 2$  (connectées en série); la résistance  $R_1 + R_2$  est connectée en parallèle avec la résistance  $R_3 + R_4$ ; la résistance résultante est de nouveau égale à 1.

### 4. La détermination de $\mu$ par une condition sur la mesure harmonique

4.1. Le quadrilatère  $Q$  (fig. 5) est conformément équivalent à un carré, c'est-à-dire qu'il existe une et une seule représentation conforme  $\zeta(w)$  du quadrilatère  $Q$  sur le carré de sommets  $\zeta(\hat{w}) = 1 + i$ ,  $\zeta(-\hat{w}) = -1 + i$ ,  $\zeta(-\hat{w}) = -1 - i$ ,  $\zeta(\hat{w}) = 1 - i$ . Vu la symétrie du quadrilatère  $Q$  relativement à son centre  $O$ , la fonction  $\tilde{\zeta}(w) := -\zeta(-w)$  donne la même représentation conforme, donc  $\zeta(w) \equiv \tilde{\zeta}(w) = -\zeta(-w)$  et en particulier  $\zeta(O) = 0$ . Chaque côté du carré ayant au centre  $O$  la mesure harmonique  $1/4$ , il en est de même pour les «côtés» du quadrilatère  $Q$ , et l'on a

$$h(O) := \omega(O; \hat{w}, -\hat{w}; Q) = \frac{1}{4}. \quad (3)$$

Autrement dit: la fonction harmonique  $h$  dans le rectangle  $|u| < 1$ ,  $|v| < 1/\mu$ , égale à 1 sur le segment-frontière  $\widehat{w, -w}$  et à zéro sur le reste du contour  $\partial Q$ , doit satisfaire  $h(O) = 1/4$  (fig. 6'). Cette condition détermine  $\mu$ .

Remarque: Cette condition (3) suit aussi du fait que la figure 6' est l'image conforme de la figure 6: la fonction  $h$  est la transplantée conforme de la fonction harmonique indiquée par la figure 6.

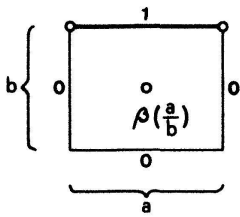


Fig. 7: la fonction harmonique définissant  $\beta(a/b)$ .

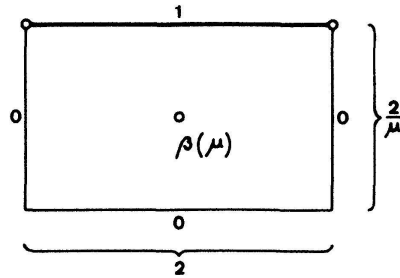


Fig. 8: la fonction harmonique  $h_1$ .

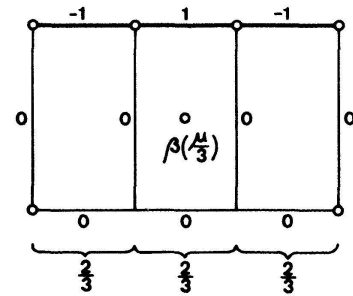


Fig. 9: la fonction harmonique  $h_2$ .

4.2. Considérons un rectangle quelconque de côtés  $a$  et  $b$ ; nous désignons par  $\beta(a/b)$  la mesure harmonique, au centre du rectangle, d'un côté de longueur  $a$  (fig. 7). Alors  $\beta(b/a)$  est la mesure harmonique, au centre du rectangle, d'un côté de longueur  $b$ ;  $2\beta(a/b) + 2\beta(b/a) = 1$  car c'est la valeur, au centre, de la fonction harmonique qui vaut 1 sur tout le contour du rectangle: elle est  $\equiv 1$ . Nous retenons donc l'identité

$$\dot{\beta}(\xi) + \beta\left(\frac{1}{\xi}\right) \equiv \frac{1}{2}. \quad (4)$$

D'autre part, la fonction  $\beta(\xi)$  est strictement monotone croissante, donc biunivoque.

4.3. Considérons, dans notre rectangle  $|u| < 1$ ,  $|v| < 1/\mu$ , la mesure harmonique  $h_1$  du côté supérieur (fig. 8): sa valeur au centre est  $\beta(\mu)$ .

D'autre part, considérons, dans le rectangle  $|u| < 1/3$ ,  $|v| < 1/\mu$  (un tiers du rectangle précédent), la mesure harmonique du côté supérieur (fig. 9): sa valeur au centre est  $\beta(\mu/3)$ . De plus, cette dernière fonction harmonique peut être prolongée, par antisymétrie, à tout le rectangle  $|u| < 1$ ,  $|v| < 1/\mu$ : nous y obtenons ainsi une fonction harmonique  $h_2$ , prenant les valeurs indiquées par la figure 9.

La moyenne arithmétique de ces deux fonctions harmoniques  $h_1$  et  $h_2$  prend précisément les mêmes valeurs que  $h$  sur le contour du rectangle (fig. 6'). Donc

$$(h_1 + h_2)/2 \equiv h;$$

en particulier, au centre  $O$  du rectangle, on a par (3)

$$\beta(\mu) + \beta\left(\frac{\mu}{3}\right) = h_1(O) + h_2(O) = 2h(O) = \frac{1}{2}.$$

D'autre part, nous avons par (4)

$$\beta(\mu) + \beta\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \beta\left(\frac{\mu}{3}\right) = \beta\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

La fonction  $\beta(\xi)$  étant biunivoque, il s'ensuit que  $\mu/3 = 1/\mu$ ,

$$\mu = \sqrt{3}, \tag{5}$$

ce qui achève cette démonstration élémentaire. Elle ne fait intervenir aucune formule de Schwarz-Christoffel, aucune intégrale elliptique.

Joseph Hersch, Math. Seminar, ETH Zürich

#### BIBLIOGRAPHIE

- 1 D. Gaier: Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden. Numer. Math. 19, 179–194 (1972).
- 2 J. Hersch: Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme. J. reine angew. Math. 218, 143–158 (1965).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/010001-05 \$1.50 + 0.20/0

## Packungen kongruenter Stäbchen mit konstanter Nachbarnzahl

Wir betrachten – grob formuliert – folgende einfache Fragen: Gegeben sei eine beliebige Anzahl kongruenter Stäbchen (etwa Holzspachteln, wie sie bei ärztlichen Untersuchungen des Rachens verwendet werden).

A. Wie viele Stäbchen hat man herauszugreifen und wie hat man diese auf einen ebenen Tisch zu legen, so dass jedes Stäbchen die gleiche Anzahl  $n$  von Nachbarn erhält?

Ohne Zweifel werden die möglichen Lösungen wesentlich von der konstanten Nachbarnzahl  $n$  abhängen. Da die Fälle  $n \leq 2$  ziemlich trivial sind, nehmen wir im folgenden  $n \geq 3$  an.

B. Für welche Nachbarnzahlen  $n \geq 3$  gibt es Lösungen?

C. Wenn für ein bestimmtes  $n$  Lösungen existieren, welche sind (ist) die mit minimaler Stäbchenzahl? An dieser Frage wird unser Hauptinteresse liegen.

Um die obigen Begriffe zu präzisieren, folgen wir der Terminologie von L. Fejes Tóth, dessen Artikel «Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl» diese und eine Reihe anderer interessanter Fragen aufwirft.