Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 904. Für beliebige $x \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ werte man die Summe

$$S(x,n) := \sum_{i=0}^{n} \left\{ \binom{x+n+i}{i} 2^{-i} - \binom{x+n+i+1}{i} 2^{-i-1} \right\}$$

geschlossen aus.

L. Kuipers, Sierre

Lösung (mit Verallgemeinerung): Wir zeigen, dass die reellen Polynomfunktionen n-ten Grades mit der Variablen x

$$S(x,n,r) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \binom{x+n+i}{i} r^{-i} - (r-1) \binom{x+n+i+1}{i} r^{-i-1} \right\}$$

und

$$T(x,n,r) = \binom{x+2n+1}{n} r^{-n-1} \qquad (r \neq 0 \text{ eine reelle Konstante})$$

für alle natürlichen Argumente übereinstimmen und deshalb identisch sind.

Beweis: Für eine natürliche Zahl m ordnen wir der Zahlenfolge

$$a_i = \binom{m+n+i}{i} r^{-i} - (r-1) \binom{m+n+i+1}{i} r^{-i-1}$$

die formale Potenzreihe $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i$ mit der Unbestimmten y zu. Der Koeffizient b_n in der formalen Potenzreihe $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i y^i = \frac{1}{1-y} a$ ist dann $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = S(m,n,r)$. In der bekannten Reihe

$$\frac{1}{(1-z)^s} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s-1+i}{i} z^i$$

substituieren wir $z = yr^{-1}$, $s = m+n+1$ (bzw. $s = m+n+2$) und erhalten

$$a = \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{-m-n-1} - \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{y}{r}\right)^{-m-n-2} = \frac{1-y}{r}\left(1 - \frac{y}{r}\right)^{m-n-2}.$$

Daraus gewinnen wir

$$b = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{y}{r}\right)^{-m-n-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+n+1+i}{i} \frac{y^i}{r^{i+1}}$$

und lesen

$$b_n = S(m,n,r) = \binom{m+2n+1}{n} r^{-n-1} = T(m,n,r)$$

ab.
Für $r = 2$ wird die verlangte geschlossene Darstellung der Summe somit

$$S(x,n,2) = \binom{x+2n+1}{n} 2^{-n-1}.$$

J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD; 2 Lösungen), L. Cseh (Cluj, RO), K. Dilcher (Wabern), J. Escher (Zuchwil), A. A. Jagers (Enschede, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Streckeisen (Zürich), W. Volgmann (Bochum, BRD), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 905. Die Funktionen $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ und $g: [0,1] \to \mathbf{R}$ seien stetig, und es gelte

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqq \left\{\int_0^1 (g(x))^2\,dx - \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2\right\} \int_0^1 (f(x))^2\,dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

U. Abel, Giessen, BRD

Lösung: Es sei

$$c = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\left(\int_0^1 f(x)\{g(x) - c\}\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2\,dx \int_0^1 (g(x) - c)^2\,dx$$

$$= \int_0^1 (f(x))^2\,dx \left\{\int_0^1 (g(x))^2 dx - \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2\right\},$$

und Gleichheit gilt genau, wenn $g(x) - c = af(x)$ für eine Konstante a.

O. P. Lossers jr., Eindhoven

Bemerkungen der Redaktion: R.O. Davies und W. Janous weisen darauf hin, dass die Stetigkeitsvoraussetzung überflüssig ist. Die Ungleichung gilt allgemeiner bei Zugrundelegung des normierten Lebesguemasses. Nach V.D. Mascioni lässt sich sogar

$$\left(\int_0^1 fg\right)^2 \left(\int_0^1 h^2\right) \leq \left\{\left(\int_0^1 g^2 \int_0^1 h^2\right) - \left(\int_0^1 gh\right)^2\right\} \int_0^1 f^2$$

für alle $f, g, h \in C_{\mathbf{R}}[0,1]$ mit $\int_0^1 fh = 0$ zeigen.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), R.O. Davies (Leicester, GB), A.A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hongkong), V.D. Mascioni (Origlio), Chr.A. Meyer (Ittigen), H.J. Seiffert (Berlin, BRD), P. Streckeisen (Zürich), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1985* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 917. Man betrachte die Menge aller einem gegebenen Dreieck ABC einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke $A'B'C'$ mit $A' \in \overline{BC}$, $B' \in \overline{CA}$, $C' \in \overline{AB}$ und den Seitenmitten $L \in \overline{B'C'}$, $M \in \overline{C'A'}$, $N \in \overline{A'B'}$.
Man zeige: L, M, N liegen auf je einer festen Geraden l, m, n.

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 918. Die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ werde von n Kreisen k_i mit Radien r_i je in zwei Punkten berührt ($i = 1, \ldots, n$; $n \geq 3$). Man bestimme r_1 als Funktion von n so, dass k_i seine beiden Nachbarkreise k_{i-1} und k_{i+1} berührt ($i = 2, \ldots, n-1$) und dass $r_n = r_1$ wird.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 919. Mit den üblichen Bezeichnungen für das ebene Dreieck (siehe O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen 1969) schätze man den Ausdruck

$$a \tan(\alpha/2) + b \tan(\beta/2) + c \tan(\gamma/2)$$

durch möglichst einfache Funktionsterme $f(r, R)$, $F(r, R)$ bestmöglich nach unten und oben ab.

D.M. Milosevic, Pranjani, YU