

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

Logarithmische Konvexität und Ungleichungsscharen

Eine differenzierbare Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ heisst logarithmisch konvex, wenn $\log(f)$ konvex ist, d. h. wenn f'/f isoton ist. Ist somit f logarithmisch konvex und s eine feste positive Zahl, so darf man schreiben

$$0 > \frac{f(t-s)}{f(t)} \left[\frac{f'(t-s)}{f(t-s)} - \frac{f'(t)}{f(t)} \right] = \frac{d}{dt} \frac{f(t-s)}{f(t)}.$$

Es folgt also, dass $g: t \mapsto f(t-s)/f(t)$ antiton ist. Wir werden an einem Beispiel zeigen, wie dieses elementare Ergebnis zu interessanten Ungleichungsscharen führen kann.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t; x) := \begin{cases} \frac{x^t - 1}{t}, & t \neq 0, \\ \log x, & t = 0 \end{cases}$$

wobei $x > 0$ eine feste Zahl ist. Da $t \mapsto x^t$ konvex ist, ist es leicht, die Isotonie von F bez. t nachzuweisen. Ferner ist F offenbar positiv, falls $x > 1$ ist.

Lemma: Sei $x > 1$ fest. Dann ist die Funktion $F: t \mapsto F(t; x)$ logarithmisch konvex.

Beweis: Es gilt für $t \neq 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\log F(t; x)) = \frac{x^t}{t^2} \left[\frac{1}{x^t} - \left(\frac{\log x^t}{x^t - 1} \right)^2 \right],$$

und dies ist > 0 wegen der Ungleichung von Karamata (vgl. [1], 3.6.15)

$$\frac{\log \xi}{\xi - 1} < \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es ein Spiel, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz: Die Funktion

$$G(t; s, x) := \frac{F(t-s; x)}{F(t; x)} = \begin{cases} \frac{t}{t-s} \cdot \frac{x^{t-s} - 1}{x^t - 1}, & t \neq 0, s \\ \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - x^{-s}}{\log s}, & t = 0 \\ s \cdot \frac{\log x}{x^s - 1}, & t = s \end{cases}$$

ist antiton bez. t für alle festgewählte $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, s > 0$.

Beweis: Der Fall $x > 1$ ist von den allgemeinen Betrachtungen am Anfang erledigt. Sei $0 < x < 1$. Wegen $F(t; x) = -F(-t; 1/x)$ gilt

$$G(t; s, x) = \frac{F(-t + s; 1/x)}{F(-t; 1/x)},$$

und G ist antiton nach dem ersten Fall.

Jetzt ziehen wir aus diesem Satz ein Paar hübscher Folgerungen:

Korollar 1: *Es gilt für $0 < u < s < v, x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$*

$$\frac{v}{v-s} \cdot \frac{x^{v-s} - 1}{x^v - 1} < s \cdot \frac{\log x}{x^s - 1} < \frac{u}{s-u} \cdot \frac{1 - x^{u-s}}{x^u - 1} < \frac{1}{sx^s} \cdot \frac{x^s - 1}{\log x}.$$

Beweis: $G(v; s, x) < G(s; s, x) < G(u; s, x) < G(0; s, x)$.

Bemerkungen: 1. Die ersten zwei Ungleichungen von Korollar 1 sind im Fall $x > 1, s = 1$, in [2] formuliert worden.

2. In der « $G(\cdot; \cdot, \cdot)$ -Sprache» lautet die Ungleichung von Karamata (s. den Beweis des Lemmas) einfach $G(1; 1, x) < G(1/2; 1, x)$. Jede $G(1; 1, x) < G(t; 1, x)$, $1/2 < t < 1$ liefert somit eine Verschärfung dieser Ungleichung.

Korollar 2: *Für $n > 1, x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ gilt*

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(x^n - 1\right)^2 < \left(x^{n-1} - 1\right) \left(x^{n+1} - 1\right) < \left(x^n - 1\right)^2.$$

Beweis: Die erste Ungleichung folgt aus $G(n; 1, x) > G(n+1; 1, x)$. Die zweite reduziert sich auf $(x-1)^2 > 0$.

V. Mascioni, Mathematik-Departement, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 D.S. Mitrinović: *Analytic Inequalities*. Berlin 1970.
- 2 L. Bass, R. Výborný und V. Thomée: *Proposal 1212*. *Math. Mag.* 58, 111 (1985).