

Viète's Tangentenkonstruktion und eine Klasse ebener Kurven

Autor(en): **Voigt, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39481>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Viètes Tangentenkonstruktion und eine Klasse ebener Kurven

In dieser Note wird eine Klasse ebener Kurven vorgestellt, für welche Viètes Methode einer analytischen Tangentendefinition in jedem Kurvenpunkt von hoher Genauigkeit ist. Diese Klasse wird durch eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung charakterisiert, deren Integration mit Hilfe elliptischer Integrale vollständig gelingt. Neben Kreisen und Geraden ergeben sich Schleifen und Spiralen sowie deren an Kreisen gespiegelte Bilder.

1. Einleitung

François Viète (1540–1603) entwickelte im 8. Buch seiner *Varia responsa* (Propositio II) einen direkten Näherungsprozess zur Tangentenbestimmung im speziellen Fall der Archimedischen Spirale, vgl. Hofmann [2]. Wir verfolgen Viètes Tangentenkonstruktion gleich für hinreichend glatte ebene Kurven in Polarkoordinatendarstellung $r = r(\phi)$; insbesondere sei stets $r^2 + \dot{r}^2 > 0$. Es seien P sowie P_{\pm} die zu den Winkeln ϕ bzw. $\phi \pm h$ gehörigen Kurvenpunkte. Unter einer Vièteschen Näherungstangente $\tau(h)$ verstehen wir die äußere Winkelhalbierende des Dreiecks P_-PP_+ durch den Punkt P . Es seien α bzw. $\alpha(h)$ die Steigungswinkel der Tangente τ bzw. der Näherungstangente $\tau(h)$. Wegen $\alpha(-h) = \alpha(h)$ gilt stets

$$\alpha(h) - \alpha = O(h^2) \quad \text{für } h \rightarrow 0. \tag{1}$$

Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass die Kurven $r = r(\phi)$, für die in jedem Punkt P der Kurve

$$\alpha(h) - \alpha = O(h^4) \quad \text{für } h \rightarrow 0 \tag{2}$$

gilt, genau die Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung (DGL)

$$V(r) := 2(r^2 + \dot{r}^2)\ddot{r} - 3\dot{r}(\ddot{r})^2 - 6r\dot{r}\ddot{r} + 2\dot{r}^3 - r^2\dot{r} = 0 \tag{3}$$

sind. Die dadurch beschriebene Klasse ebener Kurven besteht also aus allen Kurven, für welche die Viètesche Tangentenkonstruktion in jedem Kurvenpunkt im Sinne von (2) gut ist. Für die von Viète betrachtete Archimedische Spirale $r = a\phi$ gilt übrigens $V(a\phi) = a^3(2 - \phi^2) \neq 0$, d.h. diese Spirale gehört nicht zu der von uns beschriebenen Klasse.

2. Die Differentialgleichung $V(r) = 0$

Für Funktionen $f(\phi)$ betrachten wir die beiden Differenzenquotienten

$$D_+f = \frac{f(\phi+h) - f(\phi)}{h} \quad \text{und} \quad D_-f = \frac{f(\phi) - f(\phi-h)}{h}.$$

Ist f analytisch, so ist

$$D_{\pm} f = \dot{f} \pm \frac{h}{2} \ddot{f} + \frac{h^2}{6} \ddot{\ddot{f}} \pm \dots \quad (4)$$

Neben $r = r(\phi)$ betrachten wir die beiden Koordinatenfunktionen

$$x(\phi) = r(\phi) \cos \phi \quad \text{und} \quad y(\phi) = r(\phi) \sin \phi.$$

Für die Steigungen $m_{\pm} = \tan \alpha_{\pm}$ der beiden Sekanten PP_{\pm} gilt $m_{\pm} = D_{\pm} y / D_{\pm} x$. Mit den Normierungsfaktoren

$$n_{\pm} = \sqrt{(D_{\pm} x)^2 + (D_{\pm} y)^2} = \sqrt{(D_{\pm} r)^2 + \frac{2}{h^2} (1 - \cos h) r(\phi) r(\phi \pm h)}$$

berechnet man den Winkel $\alpha(h) = \frac{1}{2}(\alpha_+ + \alpha_-)$ bzw. die entsprechende Steigung $m(h) = \tan \alpha(h)$ der Näherungstangente $\tau(h)$ (etwa aus den Hesseschen Normalformen der Sekanten PP_{\pm}) zu

$$m(h) = (n_- D_+ y + n_+ D_- y) / (n_- D_+ x + n_+ D_- x). \quad (5)$$

Für die Steigung $m = \tan \alpha$ der Tangente τ gilt $m = \dot{y} / \dot{x}$.

Um die Näherung genauer zu verfolgen; entwickeln wir nun nach Potenzen des Winkels h . Ist etwa $r = r(\phi)$ analytisch, so gilt mit (4)

$$(D_{\pm} r)^2 = \dot{r}^2 \pm \dot{r} \ddot{r} h + \frac{1}{12} (4 \dot{r} \ddot{r} + 3 (\ddot{r})^2) h^2 \pm \dots,$$

$$\frac{2}{h^2} (1 - \cos h) r(\phi) r(\phi \pm h) = r^2 \pm r \dot{r} h + \frac{1}{12} (6 r \ddot{r} - r^2) h^2 \pm \frac{1}{12} (2 r \ddot{\ddot{r}} - r \dot{r}) h^3 + \dots,$$

$$n_{\pm} = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \left(1 \pm \frac{\dot{r}(r + \ddot{r})}{r^2 + \dot{r}^2} h + \frac{1}{12} \frac{4 \dot{r} \ddot{r} + 3 (\ddot{r})^2 + 6 r \ddot{r} - r^2}{r^2 + \dot{r}^2} h^2 \pm \dots \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\dot{r}(r + \ddot{r})}{r^2 + \dot{r}^2} + \frac{1}{24} M h^2 \pm \dots \right)$$

mit einem für den weiteren Verlauf irrelevanten Differentialoperator $M = M(r)$. Mit (4) erhalten wir daraus die Entwicklung

$$(r^2 + \dot{r}^2)^{-1/2} (n_- D_+ f + n_+ D_- f) = 2 \left(\dot{f} + \frac{h^2}{24} \left(4 \ddot{\ddot{f}} - 6 \ddot{f} \frac{\dot{r}(r + \ddot{r})}{r^2 + \dot{r}^2} + M \dot{f} \right) + \dots \right),$$

welche nur gerade Potenzen von h enthält. Benützen wir die letzte Entwicklung mit $x(\phi)$ bzw. $y(\phi)$ anstelle von $f(\phi)$, so erhalten wir

$$m(h) = m \frac{1 + \frac{h^2}{24} \left(4 \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} - 6 \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} \frac{\dot{r}(r + \ddot{r})}{r^2 + \dot{r}^2} + M \right) + \dots}{1 + \frac{h^2}{24} \left(4 \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} - 6 \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \frac{\dot{r}(r + \ddot{r})}{r^2 + \dot{r}^2} + M \right) + \dots}$$

$$= m \left(1 + \frac{h^2}{24} \left(4 \left(\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \right) - 6 \left(\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \right) \frac{\dot{r}(r + \ddot{r})}{r^2 + \dot{r}^2} \right) + \dots \right) = m - \frac{h^2}{12} \frac{r V(r)}{\dot{x}^2 (r^2 + \dot{r}^2)} + \dots$$

mit dem durch (3) erklärten Differentialoperator V . Daraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \alpha(h) - \alpha &= \arctan m(h) - \arctan m = \arctan \frac{m(h) - m}{1 + m \cdot m(h)} \\ &= -\frac{h^2}{12} \frac{r V(r)}{(r^2 + \dot{r}^2)^2} + \dots, \end{aligned}$$

d. h. es gilt stets (1), und (2) gilt genau dann in jedem Punkt P , wenn $r = r(\phi)$ Lösung der DGI $V(r) = 0$ ist.

3. Reduktion der DGI $V(r) = 0$

Offenbar besitzt die DGI (3) die konstanten Lösungen $r(\phi) = r_0$, also alle Kreise um den Ursprung O mit Radius r_0 . Für nichtkonstante Lösungen geht (3) durch den Ansatz

$$s = \frac{\dot{r}}{r} \tag{6}$$

über in die DGI zweiter Ordnung

$$\ddot{s} = \frac{3}{2} \frac{s}{1+s^2} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} s (1+s^2).$$

Mit dem Ansatz

$$p(s) = \dot{s}(\phi(s)) \tag{7}$$

gelangt man zu der Bernoullischen DGI

$$p' = \frac{3}{2} \frac{s}{1+s^2} p + \frac{1}{2} s (1+s^2) \frac{1}{p},$$

die mit $z = p^2$ auf die lineare DGI

$$z' = \frac{3s}{1+s^2} z + s(1+s^2) \tag{8}$$

führt. Sämtliche Lösungen von (8) sind

$$z = p^2 = (1+s^2)^2 + \lambda (1+s^2)^{3/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Damit lautet (7) nun

$$\dot{s} = \pm \sqrt{(1+s^2)^2 + \lambda (1+s^2)^{3/2}}. \tag{9}$$

Mit der Substitution

$$t = s + \sqrt{1+s^2} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (10)$$

und der Hilfsfunktion

$$H(t; \lambda) = H(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+2\lambda t+t^2)}} \quad (11)$$

führt die Integration von (7) auf

$$\pm \frac{1}{2} (\phi - \phi_0) = H(t; \lambda). \quad (12)$$

Hat man $t = t(\phi)$ aus (12) bestimmt – dies ist wegen $H'(t) > 0$ stets möglich – und beachtet (10), so führt Integration von (6) schließlich auf die allgemeine Lösung

$$\frac{r}{r_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_0}{r} = e^{\int s(\phi) d\phi} = e^{J(t; \lambda)}, \quad (13)$$

und dabei ist

$$J(t; \lambda) = \int \left(t - \frac{1}{t} \right) H'(t; \lambda) dt. \quad (14)$$

4. Die Hilfsfunktion $H(t; \lambda)$

Das Integral (11) ist für $\lambda = 0$ und $|\lambda| = 1$ elementar, ansonsten elliptisch. Im einzelnen gilt:

$$H(t; 0) = \arctan t, \quad H(t; \pm 1) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arsinh} \frac{t \mp 1}{t \pm 1}. \quad (15)$$

Mit Hilfe des elliptischen Integrals 1. Gattung

$$F(\phi, k) = \int_0^{\sin \phi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

gilt weiter (vgl. [1]):

$$H(t; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+|\lambda|}} F\left(u, \sqrt{\frac{2|\lambda|}{1+|\lambda|}}\right) \quad \text{für } 0 < |\lambda| < 1 \quad (16)$$

mit

$$u = \begin{cases} \arctan \frac{t-1}{t+1} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \\ \arctan \frac{1+t}{1-t} & \text{für } -1 < \lambda < 0, \end{cases} \quad (17)$$

sowie

$$H(t, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2|\lambda|}} F\left(v, \sqrt{\frac{1+|\lambda|}{2|\lambda|}}\right) \quad \text{für } |\lambda| > 1 \quad (18)$$

mit

$$v = \begin{cases} \arccos \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \frac{t-1}{t+1}} & \text{für } \lambda > 1 \\ \arccos \sqrt{\frac{|\lambda|-1}{|\lambda|+1} \frac{1+t}{1-t}} & \text{für } \lambda < -1. \end{cases} \quad (19)$$

5. Der Fall $\lambda = 0$

Hier ist $\dot{s} = \pm (1 + s^2)$, also $s(\phi) = \tan(\phi - \phi_0)$ bzw. $s(\phi) = \cot(\phi - \phi_0)$, woraus sich mit (13) als Lösungen

$$r = r_0 \cos(\phi - \phi_0) \quad \text{und} \quad r \sin(\phi - \phi_0) = r_0 \quad (20)$$

ergeben, das sind alle Kreise durch den Ursprung und alle Geraden, die den Ursprung nicht enthalten. In beiden Fällen gilt $\tau(h) = \tau$ (im Falle des Kreises verwende man den Satz über den Mittelpunktswinkel).

6. Der Fall $|\lambda| = 1$

In diesem Abschnitt sei $\sqrt{2}u = \phi - \phi_0$. Aus (12) ergibt sich dann mit Hilfe von (15) die Formel

$$s = \pm \frac{2 \sinh u}{2 - \cosh^2 u},$$

und damit gilt

$$\int s(\phi) d\phi = \pm \begin{cases} 2 \operatorname{Artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh u\right) & \text{für } \lambda = 1 \\ 2 \operatorname{Arcoth}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh u\right) & \text{für } \lambda = -1. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich als Lösungen

$$\frac{r}{r_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_0}{r} = \frac{\sqrt{2} + \cosh u}{|\sqrt{2} - \cosh u|} \quad (21)$$

mit $|u| < \log(1 + \sqrt{2})$ für $\lambda = 1$ und $|u| > \log(1 + \sqrt{2})$ für $\lambda = -1$.

7. Der Fall $0 < |\lambda| \neq 1$

Das Integral (14) lautet hier

$$J(t, \lambda) = \log \frac{\sqrt{1+2\lambda t+t^2} + \sqrt{1+t^2}}{|\sqrt{1+2\lambda t+t^2} - \sqrt{1+t^2}|}. \quad (22)$$

Nach (13) erhält man daraus als Lösungen

$$\frac{r}{r_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_0}{r} = \frac{\sqrt{1+2\lambda t+t^2} + \sqrt{1+t^2}}{|\sqrt{1+2\lambda t+t^2} - \sqrt{1+t^2}|}. \quad (23)$$

Wir wollen nun noch $t = t(\phi)$ aus (12) bestimmen. Dazu verwenden wir die reelle Amplitudenfunktion $\phi = \text{am}(\gamma, k)$, die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}},$$

sowie die reellen elliptischen Funktionen

$$\text{sn } \gamma = \text{sn}(\gamma, k) = \sin \text{am}(\gamma, k) \quad \text{und} \quad \text{cn } \gamma = \text{cn}(\gamma, k) = \cos \text{am}(\gamma, k).$$

Setzen wir in (12) $\phi_0 = 0$ – wir sehen also von Drehungen um den Ursprung ab –, so lautet die für (23) benötigte Substitution $t = t(\phi)$ wie folgt:

7.1. Der Fall $0 < |\lambda| < 1$

Es seien $k = \sqrt{\frac{2|\lambda|}{1+|\lambda|}}$ und $\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1+|\lambda|} \phi$. Aus (12) und (16), d. h. aus $\alpha = F(u, k)$, ergeben sich mit (17) für

$$0 < \lambda < 1: \quad t = \frac{\text{cn } \alpha + \text{sn } \alpha}{\text{cn } \alpha - \text{sn } \alpha} \quad \text{mit} \quad |\alpha| < F\left(\frac{\pi}{4}, k\right)$$

und für

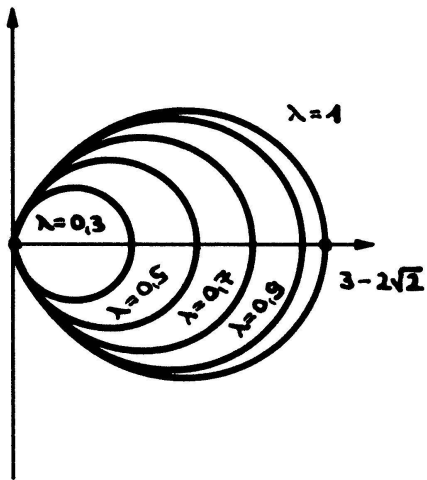
$$-1 < \lambda < 0: \quad t = \frac{\text{sn } \alpha - \text{cn } \alpha}{\text{sn } \alpha + \text{cn } \alpha} \quad \text{mit} \quad F\left(\frac{\pi}{4}, k\right) < |\alpha| < F\left(\frac{3\pi}{4}, k\right).$$

7.2. Der Fall $|\lambda| > 1$

Es seien nun $k = \sqrt{\frac{1+|\lambda|}{2|\lambda|}}$ und $\beta = \sqrt{\frac{|\lambda|}{2}} \phi$. Aus (12) und (18), d. h. aus $\beta = F(v, k)$, ergeben sich mit (19) für

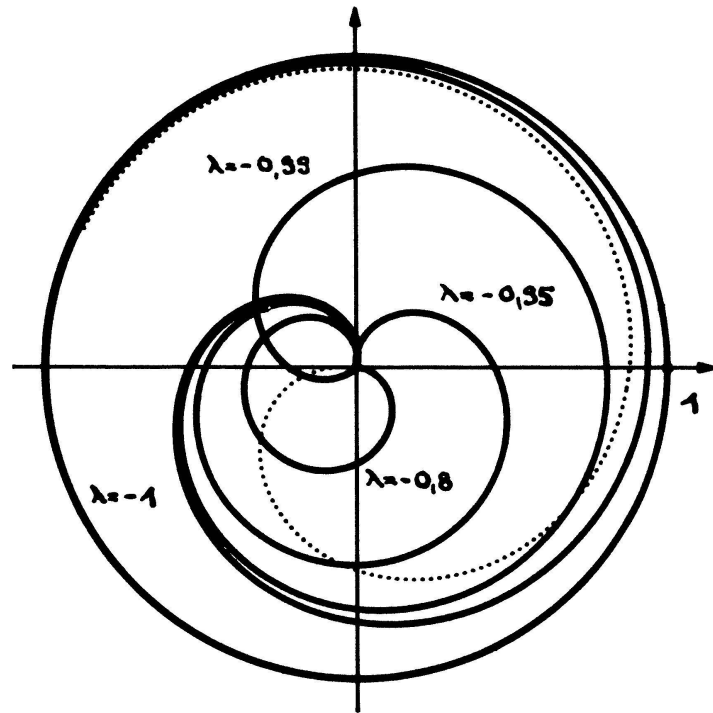
$$\lambda > 1: \quad t = \frac{\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda+1} \text{cn } \beta}{\sqrt{\lambda-1} - \sqrt{\lambda+1} \text{cn } \beta}$$

mit $\left| \beta - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right| < F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F\left(\arccos \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}, k\right)$



Figur 1. Der Fall $0 < \lambda \leq 1$: Aus dem Ursprung quellende Schleifen im Winkelraum

$$|\phi| \leq 2F\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = 2 \log(1 + \sqrt{2}).$$



Figur 2. Der Fall $-1 \leq \lambda < 0$: Für $\lambda \neq -1$ Schleifen mit punktierter Spiralscheitelkurve

$$r(\lambda) = (1 - \sqrt{1 + \lambda}) / (1 + \sqrt{1 + \lambda}),$$

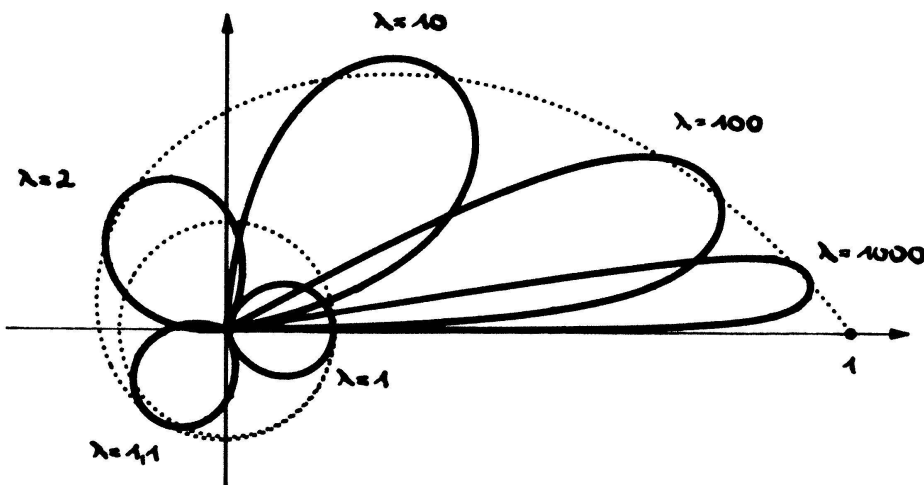
$$\phi(\lambda) = (2/\sqrt{1 - \lambda}) F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{-2\lambda/(1 - \lambda)}\right).$$

Für $\lambda = -1$ ergibt sich die Spirale (21) mit $\phi > \sqrt{2} \log(1 + \sqrt{2})$.

sowie für

$$\lambda < -1: t = \frac{\sqrt{-\lambda + 1} \operatorname{cn} \beta - \sqrt{-\lambda - 1}}{\sqrt{-\lambda + 1} \operatorname{cn} \beta + \sqrt{-\lambda - 1}}$$

$$\text{mit } F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F\left(\arccos \sqrt{\frac{-\lambda - 1}{-\lambda + 1}}, k\right) < \left| \beta - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right| < F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

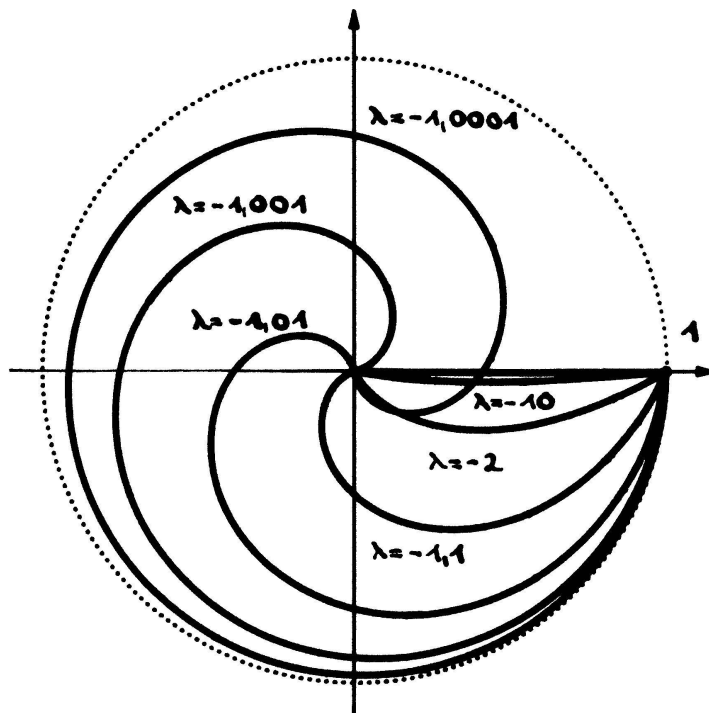


Figur 3. Der Fall $\lambda > 1$: Schleifen mit punktierter Spiralscheitelkurve

$$r(\lambda) = (\sqrt{1 + \lambda} - 1) / (\sqrt{1 + \lambda} + 1),$$

$$\phi(\lambda) = \sqrt{2/\lambda} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{(1 + \lambda)/2\lambda}\right).$$

Für $\lambda \rightarrow \infty$ erhält man die Strecke $0 \leq r \leq 1, \phi = 0$.



Figur 4. Der Fall $\lambda < -1$: Halbschleifen, welche den Nullpunkt mit dem Punkt $r=1$, $\phi=0$ verbinden. Für $\lambda \rightarrow -\infty$ erhält man die Strecke $0 \leq r \leq 1$, $\phi=0$.

8. Zusammenfassung

Die in Zusammenfassung mit Viètes Näherungsmethode zur Tangentenbestimmung betrachtete Klasse ebener Kurven besteht aus allen Lösungen der DGl $V(r)=0$. Die Lösungen sind explizit durch (20), (21) und (23) gegeben; dazu kommen noch alle Kreise $r(\phi) = \text{const}$.

A. Voigt, Math. Institut 1, Universität Karlsruhe

LITERATUR

- 1 W. Gröbner und N. Hofreiter: *Integraltafel. Erster Teil, Unbestimmte Integrale*, 2. Auflage, Wien und Innsbruck, Springer-Verlag (1957).
- 2 J. E. Hofmann: *François Viète und die Archimedische Spirale*. *Arch. Math.* V, 138–147 (1954).

Aufgaben

Aufgabe 932. Es sei

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} t^{2n-3k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Man untersuche das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten der Zahlenfolge (a_n) in Abhängigkeit vom reellen Parameter t .

J. C. Binz, Bolligen