Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 935. Man bestimme alle Lösungen der diophantischen Gleichung

$$x^y - y^x = z$$

in natürlichen Zahlen x, y, z mit $z \leq 1986$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Solution: Denote the solutions of the diophantine equation (x, y, z). We show that the solutions are precisely $(1+z, 1, z)$ for $z = 1, 2, \ldots, 1986$, $(3, 2, 1)$, $(3, 4, 17)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 5, 118)$, $(4, 5, 399)$, $(2, 6, 28)$, $(3, 6, 513)$, $(2, 7, 79)$, $(3, 7, 1844)$, $(2, 8, 192)$, $(2, 9, 431)$, $(2, 10, 924)$ and $(2, 11, 1927)$.
Let $f(x, y) = x^y - y^x$. We need the following facts.

$$f(x, y) \leq 0 \quad \text{for} \quad x = 1. \tag{1}$$
$$f(x, y) \leq 0 \quad \text{for} \quad x \geq 4, y = 2. \tag{2}$$
$$f(x, y) \leq 0 \quad \text{for} \quad x \geq y \geq 3. \tag{3}$$
$$f(x, y) > 1986 \quad \text{for} \quad y = 1, x > 1987. \tag{4}$$
$$f(x, y) > 1986 \quad \text{for} \quad 1 < x < y, y \geq 12. \tag{5}$$

Our result will follow immediately by performing direct computation of $f(x, y)$ for x, y lying in the remaining domain.
Now (1) and (4) are trivial and (2) is well-known. To prove (3) we use induction on x for fixed $y \geq 3$. Obviously (3) is true for $x = y$. If (3) is true for $x = k \geq y$, then for $x = k + 1$, we have

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (k+1)^y - y^{k+1} \\ &\leq (k+1)^y - y\,k^y \\ &= k^y(((k+1)/k)^y - y) \\ &\leq k^y(((k+1)/k)^k - y) \\ &\leq k^y(e - y) < 0\,. \end{aligned}$$

Thus (3) is true for $x \geq y \geq 3$. In a similar way, we can prove (5) readily by induction on y.
The solution to the problem is complete.

Kee-wai Lau, Hong Kong

Weitere Lösungen sandten O. Buggisch (Darmstadt, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), Schülerproblemgruppe Seminar Kreuzlingen (Kreuzlingen), L. Kuipers (Sierre), I. Paasche (Stockdorf, BRD), Schülerproblemgruppe Rämibühl (Zürich), Tsen-Pao Shen (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), B. de Weger (Leiden, NL).

Aufgabe 936. Mit der $(r+1)$-gliedrigen arithmetischen Folge $c_i = a + id$ (a, d ganz, $a \geq 0$, $d \geq 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$) definieren wir das Polynom $p(x) = \prod_{i=0}^{r} (1 - c_i x)$. $p(x)$ ist im Ring der formalen Potenzreihen über Q invertierbar. Man bestimme die Koeffizienten b_n in der Reihe $[p(x)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ und gebe für die Zahlen b_n eine kombinatorische Interpretation an.

J. Binz, Bolligen

Lösung: Sind $c_0, \ldots, c_r$ irgendwelche komplexe Zahlen, so ergibt sich durch Entwicklung in geometrische Reihen

$$p(x)^{-1} = \prod_{i=0}^{r} \sum_{k_i=0}^{\infty} (c_i x)^{k_i} = \sum_{k_0, \ldots, k_r=0}^{\infty} c_0^{k_0} \cdot \ldots \cdot c_r^{k_r} x^{k_0 + \ldots + k_r}$$

in $|x| < (\mathrm{Max}(|c_0|, \ldots, |c_r|))^{-1} =: \gamma$, woraus man sofort

$$b_n = \sum_{k_0 + \ldots + k_r = n} c_0^{k_0} \cdot \ldots \cdot c_r^{k_r} \tag{1}$$

für $n = 0, 1, \ldots$ abliest. Einsetzen von $c_i = a + id$ für $i = 0, \ldots, r$ in (1) liefert eine erste explizite Formel für die b_n der Aufgabenstellung.
Eine zweite derartige Formel, die für eine kombinatorische Interpretation der b_n geeigneter erscheint, erhält man auf folgendem Wege. Sind $c_0, \ldots, c_r$ irgendwelche komplexe, von Null verschiedene Zahlen, so ist

$$-c_i^{r-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{r} (c_i - c_j)^{-1} \Big/ \left(x - \frac{1}{c_i}\right)$$

der Hauptteil der Laurententwicklung von $p(x)^{-1}$ um die Stelle c_i^{-1}. Daher, und weil all diese Hauptteile ebenso wie $p(x)^{-1}$ selbst an ∞ verschwinden, gilt

$$p(x)^{-1} = \sum_{i=0}^{r} \frac{c_i^r}{\prod_{j \neq i} (c_i - c_j)} \cdot \frac{1}{1 - c_i x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{c_i^{r+n}}{\prod_{j \neq i} (c_i - c_j)} \right) x^n \tag{2}$$

in $|x| < \gamma$. Dabei gilt (2) unabhängig davon, ob eines der c_i verschwindet oder nicht. Aus (2) liest man speziell für $c_i = a + id$ ab

$$b_n = \frac{1}{r!\, d^r} \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} (a + id)^{r+n}, \quad (n = 0, 1, \ldots,). \tag{3}$$

Der Koeffizient von x^n rechts in (2) ist die r-te dividierte Differenz der Funktion $t \to t^{r+n}$ bezüglich der Argumentstellen $c_0, \ldots, c_r$ und b_n in (3) hat dieselbe Bedeutung bezüglich der äquidistanten Argumentstellen a, $a + d, \ldots, a + r\,d$, vgl. [2], S. 65 ff.

Im kombinatorischer Sprechweise (vgl. [1], S. 200 ff.) ausgedrückt definiert man bei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den iterierten Differenzenoperator Δ_d^j induktiv durch

$$\Delta_d^0 f(t) := f(t), \quad \Delta_d^j f(t) := \frac{1}{d}(\Delta_d^{j-1} f(t+d) - \Delta_d^{j-1} f(t)), \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Durch vollständige Induktion zeigt man daraus leicht

$$\Delta_d^j f(t) = d^{-j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} f(t + id), \quad (j = 0, 1, \ldots),$$

was aus (3) folgende Interpretation von b_n zuläßt

$$b_n = \frac{1}{r!} \Delta_d^r t^{r+n}\big|_{t=a}.$$

1 J. Riordan, Combinatorial Identities, New York-London-Sydney: Wiley, 1968.
2 F. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, Berlin, de Gruyter, 1957.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 937. Man schätze für die Innenwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eines Dreiecks die Summe

$$S := \sum_{k=1}^{3} (\sin 3\alpha_k - \sin 2\alpha_k + \sin \alpha_k)$$

bestmöglich nach oben ab. – Hinweis: Gemäss Aufgabe 716, El. Math. *30* (1975), S. 43, gilt $S \geq 0$ mit Gleichheit im gleichseitigen Fall.

Hj. Stocker, Wädenswil

Lösung (von der Redaktion leicht gekürzt):

Wir bestimmen das Maximum der Summe S nach der Methode von Lagrange und erhalten für die inneren stationären Punkte das Gleichungssystem

$$(*) \quad \begin{cases} 3\cos 3\alpha_k - 2\cos 2\alpha_k + \cos \alpha_k - \lambda = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = 0. \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Nach Elimination von λ aus (*) und unter Verwendung der Notation

$$(u, v, w) := (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$$

erhalten wir

$$(**)\quad \begin{cases}(u-v)(3u^2+3uv+3v^2-u-v-2)=0\\(u-w)(3u^2+3uw+3w^2-u-w-2)=0\,.\end{cases}$$

Wir bemerken dass zwei der Unbekannten u, v, w in (**) den gleichen Wert haben müssen, weil aus

$$\begin{cases}3u^2+3uv+3v^2-u-v-2=0\\3u^2+3uw+3w^2-u-w-2=0\end{cases}$$

mittels Subtraktion folgt, dass

$$(v-w)(3u+3v+3w-1)=0\,.$$

Der zweite Faktor in diesem Ausdruck ist $\neq 0$, da in jedem Dreieck $\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3>1$ ist. O.B.d.A. genügt es daher, die folgenden beiden Fälle zu betrachten:

$$u=v=w\left(=\tfrac{1}{2}\right), \tag{1}$$

das gleichseitige Dreieck.

$$\begin{cases}v=u, \quad w=1-2u^2\\3u^2+3uw+3w^2-u-w-2=0\end{cases} \tag{2}$$

also

$$12u^4-6u^3-7u^2+2u=0$$

mit den Lösungen:

$$u=v=0, \quad w=1 \tag{2a}$$

$$u=v=0.93360, \qquad w=-0.74323 \tag{2b}$$

$$u=v=0.25809, \qquad w=0.86678 \tag{2c}$$

$$u=v=-0.69169, \qquad w=0.04312. \tag{2d}$$

Der Fall (2d) hat im Dreieck keine reelle Bedeutung.
Es bleiben noch die Randpunkte übrig:

$\alpha_3=0$ gibt $S=2\sin\alpha_1+2\sin 3\alpha_1$

$$S'=2(\cos\alpha_1+3\cos 3\alpha_1)=8(3u^3-2u).$$

Stationäre Punkte sind $(-1 \leq u \leq 1)$

$$u=0, \quad v=0, \quad w=1 \tag{3a}$$

$$u=0.81650, \quad v=-0.81650 \tag{3b}$$

$$u=-0.8160\ , \quad v=0.81650 \tag{3c}$$

$$u=1, \quad v=-1, \quad w=1 \tag{3d}$$

$$u=-1, \quad v=1, \quad w=1\,. \tag{3e}$$

Die Berechnung von S in den Punkten (2a)–(3e) ergibt, dass (2b) das gesuchte Maximum liefert. Die Extremalfigur ist somit ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Innenwinkel von etwa $138°$ und $S = 3.6332\ldots$.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD; Teillösung), H. Egli (Zürich), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hong Kong), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal). Eine Lösung war falsch.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1987* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 953. Man bestimme in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Funktionen $f: \{0,1,\ldots,n\} \to \{0,1,\ldots,n\}$ mit der Eigenschaft

$$f(i) = \operatorname{card} f^{-1}(i) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

P. G. Becker-Landeck,
S. Eckmann, Plettenberg, BRD

Aufgabe 954. Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, deren Quadratwurzeln die Kettenbruchentwicklung

$$\sqrt{n} = [a; \overline{m, m, \ldots, m, 2a}]$$

mit k-Gliedern haben ($k, m \in \mathbb{N}; 2a \neq m$).

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 955. Für reelle a, b, c mit $0 < a, b, c < 1/2$ und $a + b + c = 1$ zeige man

$$\sqrt{(1-2a)(1-2b)(1-2c)} \leq 3\sqrt{3}\, a\, b\, c.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

L. Cseh, I. Merényi, Cluj, Rumänien

Aufgabe 956. Man finde bestmögliche Konstanten c_1, c_2 derart, dass

$$\frac{1}{n-c_1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n-c_2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Anmerkung: Nach A. Ostrowski (s. [1], p. 39) gilt die rechte Ungleichung (*) für $c_2 = 1/2$.

LITERATURVERZEICHNIS

1 A. Ostrowski, Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung, Bd. I, Basel 1964.
2 P. Ivady, Aufgabe 934, El. Math. *40* (1985) 154.

V. D. Mascioni, Zürich

Literaturüberschau

Catherine Goldstein: Séminaire de Théories des Nombres, Paris 1983-84, (Séminaire Delange-Pisot-Poitou). Progress in Mathematics. 278 Seiten, Fr. 72.–. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1985.
Die 17 Vortragsausarbeitungen des vorliegenden Bandes beschreiben neuere Forschungsergebnisse in den verschiedensten Gebieten der Zahlentheorie: Analytische Z.T. (J.-M. Deshouillers, G. Tennenbaum, E. Fouvry, J. Oesterlé), Algebraische Z.T. (J. Martinet, C. G. Schmidt), Diophantische Z.T. (J. H. Evertse, P. Philippon), Pisot-Zahlen (D. W. Boyd), Elliptische Kurven (D. Bernardi, C. Goldstein, G. Robert), Algebraische Geometrie (A. G. Ogg, C. Soulé), p-adische Analysis (J. Denef, G. Henniart, J.-P. Winterberger), Modulfunktionen (H. Hida).
Im besonderen seien erwähnt (was lediglich das persönliche Interesse des Rezensenten widerspiegelt): D. W. Boyd's effektive Konstruktion der Pisot-Zahlen zwischen 1 und 2; die Arbeit von J.-M. Deshouillers und G. Tennenbaum über die statistische Verteilung der Teiler der natürlichen Zahlen; E. Fouvry's Beitrag zum Satz von Adleman, Heath-Brown und Fouvry, welcher aussagt dass der sogenannte «erste Fall» des Grossen Theorems von Fermat für unendlich viele Primzahlexponenten wahr ist. H. Joris

C. F. Gardiner: Algebraic Structures. Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications. 280 Seiten, £ 14.50. John Wiley & Sons Ltd., New York, Chichester, Brisbane, Toronto 1986.
In diesem Text werden Grundbegriffe aus der algebraischen Strukturtheorie behandelt und angewandt. Die vier Kapitel umfassen eine Einführung in die Gruppentheorie, Ringtheorie, Lineare Gruppen und algorithmische Gruppentheorie. Unter Ringtheorie werden mit Schwergewicht kommutative Ringe und Galoistheorie behandelt, während «Lineare Gruppen» einfache Matrixgruppen und eine Einführung in die Darstellungstheorie umfasst. Neu für einen Algebratext dieser Art ist die Berücksichtigung von Informatikwerkzeugen im Rahmen der Gruppentheorie. Es wird die Konstruktion von Computerprogrammen zum Todd-Coxeter Algorithmus und verwandter Verfahren aus der kombinatorischen Gruppentheorie behandelt. Im Text eingestreut sind einige interessante Anwendungen (z.B. Codierungstheorie). Jedes Kapitel umfasst eine Serie ansprechender und teils anspruchsvoller Übungen. Bemerkenswert sind Stil und Aufbau dieses Buches: Beides besticht durch schlichte Klarheit.
Das Buch kann ohne Einschränkung empfohlen werden. H. R. Schneebeli