

# Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper

Autor(en): **Harborth, Heiko**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 5

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40039>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

und damit ([2], Seite 19, Satz 3.2)

$$S = 0 \left( n^2 / \log(n/\varepsilon) \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aufgrund des Hilfssatzes entspringt daraus aber der Widerspruch

$$n^2 = 0 \left( n^2 / \log(n/\varepsilon) \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aus der Widerlegung der obigen Annahme folgt die Behauptung des Theorems.

H. Bergmann, Hamburg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Bergmann: Aufgabe 906. Lösung von P. Bundschuh. El. Math. 40, 52–53 (1985).
- 2 K. Pracher: Primzahlverteilung. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

#### ANMERKUNGEN

- [1\*] Äquivalente Eigenschaft: « $a$  ist Primitivwurzel mod  $p$ ».
- [2\*] Es gilt stets:  $0 < \Omega^*(a \pmod{p}) \leq 1$ .
- [3\*] Für reelle Zahlen  $x$  sei  $[x]$  die größte ganze Zahl  $\leq x$ .
- [4\*] Außer  $\delta = 0$  für  $a \equiv 0 \pmod{2}$  gibt es zwei verschiedene Formeln für  $\delta$ , je nachdem  $a \equiv \pm 1 \pmod{4}$ .
- [5\*] Die Summe bricht ab, wenn  $i > \log n / \log p$ , und es ist  $[n/p^i] \leq n/p$ .

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/050115-00\$1.50+0.20/0

## Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper

*Herrn Professor Dr. Jörg M. Wills zu seinem fünfzigsten Geburtstag*

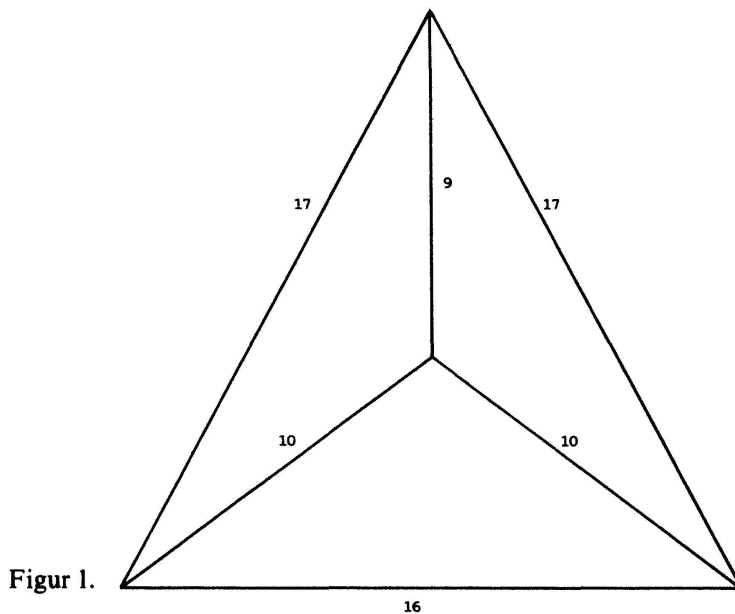
Die fünf platonischen Körper sind seit mehr als zweitausend Jahren bekannt. Trotzdem bleiben auch heute noch immer wieder interessante ihrer Eigenschaften zu untersuchen (siehe zum Beispiel [2], [3], [4] und für historische Anmerkungen [6]).

In dieser Note werden die Graphen der platonischen Körper diskutiert. Diese Graphen sind planar, das heisst, sie lassen sich in der Ebene ohne Überkreuzungen der Kanten zeichnen.

Es ist bekannt ([5]), dass sich alle planaren Graphen sogar derart in der Ebene zeichnen lassen, dass alle Kanten geradlinig sind. Darüber hinaus soll nun auch die weitergehende Frage gestellt werden:

*Lässt sich jeder planare Graph in der Ebene so darstellen, dass alle Kanten geradlinig und von ganzzahliger Länge sind?*

Im folgenden wird diese Frage für die speziellen Graphen der platonischen Körper positiv beantwortet. Weiterhin werden die kleinsten Längen  $d$  der maximalen Kantenlängen aller solcher ganzzahligen planaren Darstellungen eines platonischen Körpers bestimmt, das heisst, es werden die kleinsten Beispiele ermittelt.



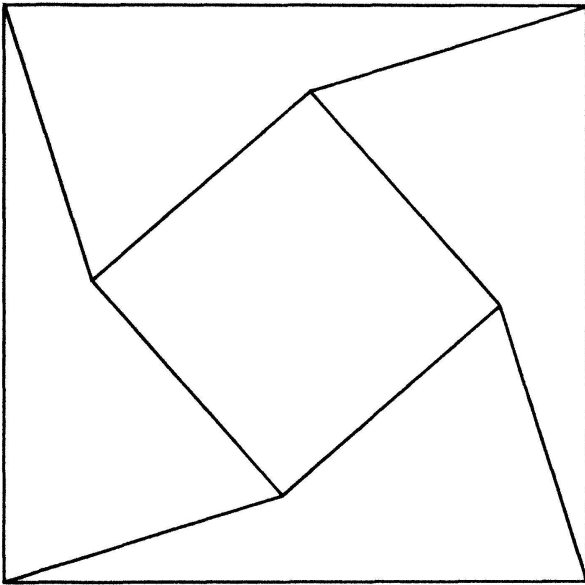
Figur 1.

**Satz.** Mit  $d_i$  als Minimum der maximalen Kantenlängen aller ganzzahligen planaren Darstellungen der Graphen von Tetraeder ( $i=4$ ), Würfel ( $i=6$ ), Oktaeder ( $i=8$ ), Dodekaeder ( $i=12$ ) oder Ikosaeder ( $i=20$ ) gelten  $d_4=17$ ,  $d_6=2$ ,  $d_8=13$ ,  $d_{12}=2$  und  $d_{20}=159$ .

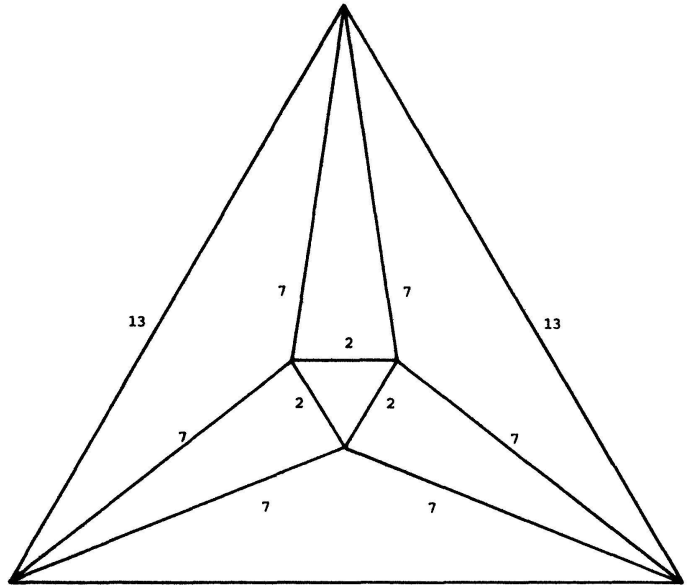
**Beweis.**  $i=6$ : Aus der Darstellung des Würfelgraphen in Figur 2 mit 4 Kanten der Länge 2 und 8 Kanten der Länge 1 folgt  $d_6 \leq 2$ . Es wird nun angenommen, dass eine Darstellung mit allen Kanten der Länge 1 existiert. Dann muss es zwei Rhomben  $R_\alpha$  und  $R_\beta$  mit Kantenlängen 1 und mit voneinander verschiedenen Eckpunkten (Knoten der Graphen) so geben, dass ein Rhombus ganz innerhalb des anderen liegt. Die kleinsten Innenwinkel der Rhomben seien mit  $\alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$  bezeichnet ( $\alpha = \beta$  bedeutet Kongruenz von  $R_\alpha$  und  $R_\beta$ ). Dann folgt aus den Flächeninhalten  $F_\alpha = \sin \alpha < F_\beta = \sin \beta$ , dass  $R_\beta$  nicht innerhalb  $R_\alpha$ , und aus den Durchmessern (längsten Diagonalen)  $D_\alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} > D_\beta = 2 \cos \frac{\beta}{2}$ , dass  $R_\alpha$  nicht innerhalb  $R_\beta$  liegen kann. Durch diesen Widerspruch ist  $d_6 > 1$  bewiesen.

$i=12$ : Die Darstellung des Dodekaedergraphen in Figur 4 mit 10 Kanten der Länge 2 und 20 Kanten der Länge 1 beweist  $d_{12} \leq 2$ . Falls es eine Darstellung mit allen Kanten der Länge 1 gibt, dann ist ein Fünfeck mit Flächeninhalt  $F_{12}$  aufgeteilt in 11 sich nicht überlappende Fünfecke mit Flächeninhalten  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq 11$ . Dabei sind alle 12 Fünfecke einfach zusammenhängend und gleichseitig mit den Seitenlängen 1. Wenn für den Flächeninhalt  $F$  eines Fünfecks dieser Art

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq F \leq \frac{5}{4} \tan^{-1} \frac{\pi}{5} \tag{1}$$



Figur 2.



13  
Figur 3.

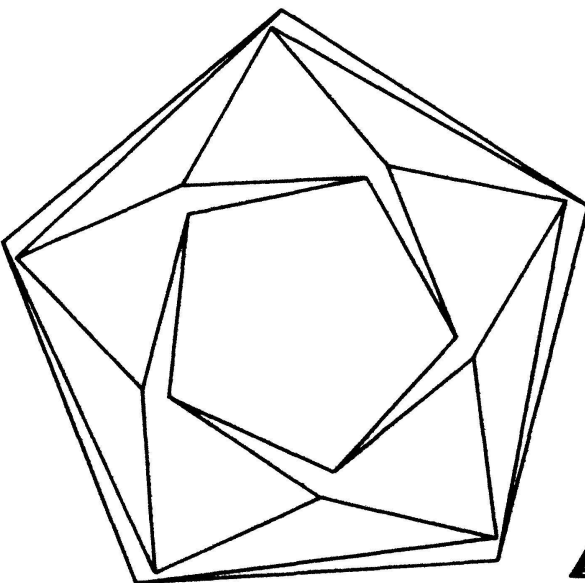
gilt, dann ist durch den Widerspruch

$$4 < \frac{11}{4} \sqrt{3} \cong \sum_{i=1}^{11} F_i = F_{12} \cong \frac{5}{4} \tan^{-1} \frac{\pi}{5} < 2 \quad (2)$$

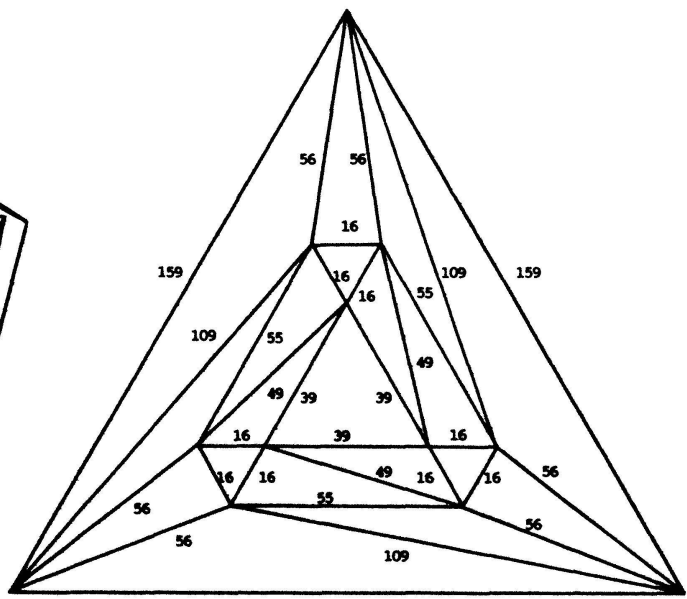
auch  $d_{12} > 1$  bewiesen.

Die Abschätzung nach oben in (1) entspricht der bekannten Tatsache, dass unter allen Fünfecken mit dem konstanten Umfang der Länge 5 das regelmässige Fünfeck den grössten Flächeninhalt hat (siehe etwa [1], Seite 9).

Zum Beweis der unteren Abschätzung in (1) wird ein gleichseitiges, einfach zusammenhängendes Fünfeck in drei Dreiecke mit den Seitenlängen  $(a, 1, 1)$ ,  $(a, b, 1)$  und



Figur 4.



159  
Figur 5.

$(b, 1, 1)$  zerlegt, wobei  $a$  und  $b$  die Längen der beiden Diagonalen sind, die von einem Eckpunkt des Fünfecks mit dem grössten Innenwinkel ausgehen. Unter Benutzung der Heronischen Formel für diese drei Dreiecke ergibt sich der Flächeninhalt  $F$  des Fünfecks zu

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{4-a^2} + \frac{b}{4} \sqrt{4-b^2} + \frac{1}{4} \sqrt{((a+b)^2-1)(1-(a-b)^2)} \quad (3)$$

mit  $2 \geq a \geq b \geq 0$ .

Nun werden vier Fälle unterschieden:

**Fall 1:**  $1 \geq a \geq b \geq 0$ . Mit der Dreiecksungleichung  $a+b \geq 1$  im Dreieck  $(a, b, 1)$  folgt aus (3)

$$F \geq \frac{a}{4} \sqrt{3} + \frac{b}{4} \sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Fall 2:**  $\sqrt{3} \geq a \geq 1$  oder  $\sqrt{3} \geq b \geq 1$ . Da  $f(x) = \frac{x}{4} \sqrt{4-x^2}$  für  $x = \sqrt{2}$  sein Maximum hat, ist  $f(1) = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$  für  $x = a$  und  $x = b$  das Minimum.

**Fall 3:**  $2 \geq a \geq b \geq \sqrt{3}$ . Aus (3) folgt

$$F \geq \frac{1}{4} \sqrt{((2\sqrt{3})^2-1)(1-(2-\sqrt{3})^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{11(4\sqrt{3}-6)} > \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Fall 4:**  $2 \geq a \geq \sqrt{3}$  und  $1 \geq b$ . Mit der Dreiecksungleichung  $a \leq b+1$  im Dreieck  $(a, b, 1)$  folgt aus den ersten beiden Termen rechts in (3)

$$F \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{4-(b+1)^2} + \frac{b}{4} \sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$i = 4, 8$  und  $20$ : Für diese drei Zerlegungen der Ebene in Dreiecke wurden die Werte für  $d_i$  per Computer bestimmt (Amdahl 470 der Technischen Universität Braunschweig). Die kleinsten Beispiele sind aus den Figuren 1, 3 und 5 zu entnehmen.

Abschliessend sei noch angemerkt, dass die minimalen Beispiele in den Figuren 1, 3 und 5 starr sind, wohingegen die in den Figuren 2 und 4 in sich beweglich sind.

Heiko Harborth, Arnfried Kemnitz, Meinhard Möller, Andreas Süssenbach  
Techn. Universität Braunschweig

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972.
- 2 Ch. Hippenmeyer: Aufgabe 804. Elem. Math. 34, 61-63 (1979).
- 3 M. Jeger: Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders. Elem. Math. 30, 73-82 (1975).

- 4 D. H. Lehmer: Coloring the platonic solids. Amer. Math. Monthly 93, 288–292 (1986).  
 5 K. Wagner: Graphentheorie. BI Mannheim, 1970.  
 6 J. M. Wills: Mathematik und Kunst: Die platonischen Körper. Siegener Studien (Liter. und Naturwiss.) 35, 17–27 (1983/84).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/050000-00\$1.50+0.20/0

## Some inequalities for the triangle

**Notation.**  $a, b, c$  – sides BC, CA, AB of a triangle ABC;  $\alpha, \beta, \gamma$  – its angles;  $s$  – semi-perimeter;  $F$  – area;  $R$  – radius of circumcircle;  $r$  – radius of incircle;  $h_a, h_b, h_c$  – altitudes;  $m_a, m_b, m_c$  – medians and  $r_a, r_b, r_c$  – radii of excircles.

**Theorem 1.** *In every triangle the following equalities are valid:*

$$\frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} + \frac{h_a + h_b}{r_c} = 6 \quad (1)$$

$$\cos^3 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} + \cos^3 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} + \cos^3 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{3s}{4R}. \quad (2)$$

**Proof.** Since

$$h_a = \frac{2F}{a}, \quad h_b = \frac{2F}{b}, \quad h_c = \frac{2F}{c} \quad \text{and}$$

$$r_a = \frac{F}{s-a}, \quad r_b = \frac{F}{s-b}, \quad r_c = \frac{F}{s-c},$$

we have

$$\begin{aligned} & \frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} + \frac{h_a + h_b}{r_c} \\ &= \frac{2}{abc} (a(s-a)(b+c) + b(s-b)(c+a) + c(s-c)(a+b)) \\ &= \frac{2}{abc} (a^3 + b^3 + c^3 - 2s(a^2 + b^2 + c^2) + 2s(ab + bc + ca)). \end{aligned}$$