

Über Lehmers Mittelwertfamilie

Autor(en): **Alzer, Horst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40801>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REFERENCES

- 1 G. Birman and K. Nomizu: Trigonometry in Lorentzian geometry. Amer. Math. Monthly, vol. 91, No. 9, Nov. 1984.
- 2 L. K. Graves: Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. Transaction of the A.M.S., vol. 252, 1979.
- 3 R. K. Sach and H. Wu: General relativity for mathematicians. Springer, New York, 1977.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/020046-05 \$ 1.50 + 0.20/0

Über Lehmers Mittelwertfamilie

Gegenstand dieser Note ist die für positive x und y sowie für reelle Parameter r definierte Mittelwertfamilie

$$L_r(x, y) = \frac{x^{r+1} + y^{r+1}}{x^r + y^r},$$

die die drei klassischen Mittelwerte:

das arithmetische Mittel: $L_0(x, y) = \frac{x + y}{2},$

das geometrische Mittel: $L_{-1/2}(x, y) = \sqrt{xy}$ und

das harmonische Mittel: $L_{-1}(x, y) = \frac{2xy}{x + y}$

enthält. Von H. W. Gould und M. E. Mays [4] ist für L_r die Bezeichnung Lehmer Mittel gewählt worden. Zahlreiche interessante Eigenschaften von L_r findet man in [1–4], [8]. Die einparametrische Funktionenschar $L_r(x, y)$ ist ein Spezialfall der im Jahre 1938 von C. Gini [3] für positive x_1, \dots, x_n sowie für reelle Parameter r und s eingeführten Mittelwertfamilie

$$G(r, s; x_1, \dots, x_n) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{\sum_{i=1}^n x_i^s} \right]^{1/(r-s)} \quad \text{für } r \neq s,$$

$$G(r, r; x_1, \dots, x_n) = \exp \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^r \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^r} \right].$$

Bemerkenswert ist eine vor kurzem von D. Farnsworth und R. Orr [2] veröffentlichte Note über Gini Mittel, in der unter anderem gezeigt wird, wie sich das Lehmer Mittel

$L_r(x, y) = G(r + 1, r; x, y)$ für ganzzahlige Parameter r geometrisch interpretieren lässt.

Unser Ziel ist es, einige neue Ungleichungen für L_r zu beweisen. Wir beginnen mit dem Beweis zweier Hilfssätze. Zunächst zeigen wir, in welchen Intervallen die Funktionen $L_r(x, y)$ und $\log L_r(x, y)$ bezüglich r konvex bzw. konkav sind.

Lemma 1. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann ist die Funktion $L(r) = L_r(x, y)$ in \mathbb{R}_0^- streng konvex und in \mathbb{R}_0^+ streng konkav sowie in $(-\infty, -1/2]$ logarithmisch streng konvex und in $[-1/2, \infty)$ logarithmisch streng konkav.

Beweis. 1. Zweimalige Differentiation von L ergibt:

$$L''(r) = \frac{(x y)^r (\log x/y)^2}{(x^r + y^r)^3} (y - x) (x^r - y^r).$$

Hieraus folgt:

$$L''(r) > 0 \quad \text{für } r < 0 \quad \text{und}$$

$$L''(r) < 0 \quad \text{für } r > 0.$$

2. Wir bezeichnen mit f die Funktion

$$f(r) = \log L_r(x, y).$$

Dann folgt nach einigen einfachen Rechnungen:

$$f''(r) = \frac{(x y)^r (\log x/y)^2}{(x^r + y^r)^2 (x^{r+1} + y^{r+1})^2} (y - x) (x^{2r+1} - y^{2r+1});$$

somit erhalten wir:

$$f''(r) > 0 \quad \text{für } r < -1/2$$

und

$$f''(r) < 0 \quad \text{für } r > -1/2. \quad \square$$

Weiter benötigen wir folgenden (bekannten) Satz über konvexe Funktionen (vgl. [9, p. 16]):

Lemma 2. Wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng konvexe Funktion ist, dann gilt für alle $r, s, t \in I$ mit $r < s < t$:

$$(t - s) f(r) + (r - t) f(s) + (s - r) f(t) > 0. \tag{1}$$

Beweis. Da f in I streng konvex ist, gilt für alle reellen $a \in (0, 1)$:

$$f(ar + (1 - a)t) < af(r) + (1 - a)f(t). \quad (2)$$

Wenn wir in (2) $s = ar + (1 - a)t$ einsetzen und anschliessend beide Seiten von (2) mit $t - r$ multiplizieren, dann folgt (1). \square

Wir setzen nun $x \neq y$ voraus; nach Lemma 1 erfüllen die vier Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(r) &= L_r(x, y) && \text{in } \mathbb{R}_0^-, \\ f_2(r) &= -L_r(x, y) && \text{in } \mathbb{R}_0^+, \\ g_1(r) &= \log L_r(x, y) && \text{in } (-\infty, -1/2] \quad \text{und} \\ g_2(r) &= -\log L_r(x, y) && \text{in } [-1/2, \infty) \end{aligned}$$

die Voraussetzungen von Lemma 2. Somit gilt:

Satz 1. Es seien r, s und t reelle Zahlen sowie x und y positive Zahlen. Wenn $r < s < t \leq 0$, dann gilt:

$$(t - s)L_r(x, y) + (r - t)L_s(x, y) + (s - r)L_t(x, y) \geq 0. \quad (3)$$

Falls $0 \leq r < s < t$, dann muß in (3) das Zeichen „ \geq “ durch „ \leq “ ersetzt werden. Wenn $r < s < t \leq -1/2$, dann gilt:

$$[L_r(x, y)]^{t-s} [L_s(x, y)]^{r-t} [L_t(x, y)]^{s-r} \geq 1. \quad (4)$$

Falls $-1/2 \leq r < s < t$, dann muß in (4) das Zeichen „ \geq “ durch „ \leq “ ersetzt werden. In allen Fällen gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x = y$.

Abschließend wollen wir ein Gegenstück zu Satz 1 beweisen. Hierzu benötigen wir eine Ungleichung, die von E. M. Wright [11] im Jahre 1956 veröffentlicht wurde:

Lemma 3. Wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine monotone oder konvexe Funktion ist, dann gilt für alle Zahlen $r, s, t \in I$ die Ungleichung

$$(r - s)(r - t)f(r) + (s - r)(s - t)f(s) + (t - r)(t - s)f(t) \geq 0. \quad (5)$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (5) genau dann, wenn $r = s = t$.

Auf Grund von

$$\frac{d}{dr} L_r(x, y) = \frac{(xy)^r \log(x/y)(x - y)}{(x^r + y^r)^2} \geq 0$$

ist $L_r(x, y)$ und folglich auch $\log L_r(x, y)$ bezüglich r in \mathbb{R} monoton steigend. Vgl. [1].

Weiter gilt:

Wenn $x, y \geq 1, x \neq y$ (bzw. $0 < x, y \leq 1, x \neq y$), dann $L_r(x, y) > 1$ (bzw. $L_r(x, y) < 1$);
wenn $0 < y < 1 < x$ oder $0 < x < 1 < y$, dann

$$L_r(x, y) > 1 \Leftrightarrow r > \log \frac{1-y}{x-1} / \log \frac{x}{y}.$$

Somit erfüllen die Funktionen

$$f(r) = L_r(x, y) \quad \text{in } \mathbb{R},$$

$$g_1(r) = \log L_r(x, y) \quad (\text{mit } x, y \geq 1, x \neq y) \quad \text{in } \mathbb{R},$$

$$g_1(r) = \log L_r(x, y) \quad (\text{mit } 0 < y < 1 < x \text{ oder } 0 < x < 1 < y)$$

$$\text{im Intervall } \left(\log \frac{1-y}{x-1} / \log \frac{x}{y}, \infty \right)$$

und

$$g_2(r) = -\log L_r(x, y) \quad (\text{mit } 0 < x, y \leq 1, x \neq y) \quad \text{in } \mathbb{R}$$

die Voraussetzungen von Lemma 3 und wir erhalten:

Satz 2. Es seien r, s und t reelle Zahlen sowie x und y positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$(r-s)(r-t)L_r(x, y) + (s-r)(s-t)L_s(x, y) + (t-r)(t-s)L_t(x, y) \geq 0.$$

Wenn $x, y \geq 1, x \neq y$, dann gilt:

$$[L_r(x, y)]^{(r-s)(r-t)} [L_s(x, y)]^{(s-r)(s-t)} [L_t(x, y)]^{(t-r)(t-s)} \geq 1. \tag{6}$$

Wenn $0 < y < 1 < x$ oder $0 < x < 1 < y$, dann gilt (6), falls

$$\min(r, s, t) > \log \frac{1-y}{x-1} / \log \frac{x}{y}.$$

Wenn $0 < x, y \leq 1, x \neq y$, dann muß in (6) das Zeichen „ \geq “ durch „ \leq “ ersetzt werden.

Das Gleichheitszeichen gilt in allen Fällen genau dann, wenn $r = s = t$.

Bemerkung. Die von K. B. Stolarsky [10] für positive x und y (mit $x \neq y$) und für reelle Parameter r und s (mit $r \neq s, rs \neq 0$) definierte Mittelwertfamilie

$$E(r, s; x, y) = \left[\frac{r}{s} \frac{x^s - y^s}{x^r - y^r} \right]^{1/(s-r)}$$

steht auf Grund von

$$G(r, s; x, y) = [E(2r, 2s; x, y)]^2 / E(r, s; x, y)$$

in Beziehung zu Ginis Mittelwertfamilie G .

Zahlreiche Eigenschaften von E findet man in [5–7], [10] und in der dort zitierten Literatur.

Gould und Mays [4] haben gezeigt, dass die einzigen Mittelwerte, die sowohl $E(r, s; x, y)$ als auch $L_r(x, y)$ angehören, das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel von x und y sind.

Der Redaktion möchte ich für Verbesserungsvorschläge herzlich danken.

Horst Alzer, Waldbröl

LITERATUR

- 1 E. F. Beckenbach: A class of mean value functions. *Amer. Math. Monthly* 57, 1–6 (1950).
- 2 D. Farnsworth and R. Orr: Gini means. *Amer. Math. Monthly* 93, 603–607 (1986).
- 3 C. Gini: Di una formula comprensiva delle medie. *Metron* 13, 3–22 (1938).
- 4 H. W. Gould and M. E. Mays: Series expansions of means. *J. Math. Anal. Appl.* 101, 611–621 (1984).
- 5 E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values. *Amer. Math. Monthly* 85, 84–90 (1978).
- 6 E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values II. *J. Math. Anal. Appl.* 92, 207–223 (1983).
- 7 E. B. Leach and M. C. Sholander: Multi-variable extended mean values. *J. Math. Anal. Appl.* 104, 390–407 (1984).
- 8 D. H. Lehmer: On the compounding of certain means. *J. Math. Anal. Appl.* 36, 183–200 (1971).
- 9 D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalities*. Springer Verlag, Berlin 1970.
- 10 K. B. Stolarsky: Generalizations of the logarithmic mean. *Math. Mag.* 48, 87–92 (1975).
- 11 E. M. Wright: A generalization of Schur's inequality. *Math. Gaz.* 40, 217 (1956).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/020050-05 \$ 1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilung

Sums of a certain family of series

By identifying the sum

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^k (n+k+1)} \quad (n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}) \quad (1)$$

with the integral

$$S_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} t^n dt, \quad (2)$$

and evaluating this Eulerian integral, M. Vowe and H.-J. Seiffert [3] have recently shown that

$$S_n = \frac{2^n (n-1)! n!}{(2n)!} - \frac{2^{-n}}{n} \quad (n \in \mathcal{N}). \quad (3)$$