Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

6) In order to arrive to a better refinement, we can consider the relation (3) for $f(t) = 1/t$, $k = 2 \, (0 < a < b)$. It results $L(a,b) < \frac{3}{8}(a+b)^3/(a^2 + ab + b^2)$. Letting $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$, this is just one of the Lin [3] and Rüthing [8] inequalities:

$$L(x,y) < \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2}\right)^3 \tag{12}$$

The author wishes to thank the referee for his valuable suggestions.

Joseph Sándor,
Jud. Harghita, Romania

REFERENCES

1 Beckenbach E. F.: Convex functions. Bull. Amer. Math. Soc. *54*, 439–460 (1948).
2 Carlson B. C.: Some inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc. *17*, 32–39 (1966).
3 Lin T. P.: The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly *81*, 879–883 (1974).
4 Love E. R.: Some logarithm inequalities. Math. Gaz. *64*, 55–57 (1980).
5 Lupaş A.: Problem 12739. Gaz. Mat. (Bucureşti), Number 2, 1973.
6 Ostle B. and Terwilliger H. L.: A comparison of two means. Proc. Montana Acad. Sci. *17*, 69–70 (1957).
7 Pólya G. and Szegö G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, vol. I, Ch. 4, Springer 1924.
8 Rüthing D.: Eine allgemeine logarithmische Ungleichung. El. Math. *41*, 14–16 (1986).
9 Sándor J.: On Hadamard's inequality (Hungarian). Mat. Lapok (Cluj) *87*, 427–430 (1982).

 0013-6018/88/060177-04$1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

Eine komplexe Ungleichung aus elementarer Sicht

Aus der Operatorentheorie ist folgende Ungleichung bekannt:

Für $f(z_1, z_2) = 1 + 2(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)^2$ mit $z_1, z_2 \in C$ und $|z_1| = |z_2| = 1$ gilt

$$|f(z_1, z_2)| \leq 5. \tag{1}$$

Man kann (1) mit Hilfe der Ableitungen beweisen, indem man $z_1 = \exp(i\varphi_1)$, $z_2 = \exp(i\varphi_2)$ setzt und dann die Paare φ_1, φ_2 sucht, für die

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}|f(z_1, z_2)|^2 = \frac{\partial}{\partial\varphi_2}|f(z_1, z_2)|^2 = 0$$

gilt. Dieser Beweis führt aber zu langen trigonometrischen Rechnungen. Deshalb wollen wir hier einen synthetischen Beweis ohne Benutzung partieller Ableitungen geben.
Setzt man $p_a(z) = 1 + 2(z + a) + (z - a)^2$ für ein $a = \exp(i\vartheta)$, so ist nachzuweisen, dass $\max_{|z|=1} |p_a(z)| = 5$ ist. Wegen $|p_a(z)| = |p_{\bar{a}}(\bar{z})|$ kann man $0 \le \vartheta \le \pi$ voraussetzen. Für die Nullstellen z_1, z_2 des Polynoms $p_a(z)$ verifiziert man

$$z_1 = \exp(i\vartheta) - 1 + 2\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right),$$

$$z_2 = \exp(i\vartheta) - 1 - 2\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right);$$

dabei lässt sich für ein $\varrho \in [0, 2]$ $\exp(i\vartheta) - 1 = \varrho \exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right)$ schreiben. Somit bekommt man

$$z_1 = (\varrho + 2)\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right),$$

$$z_2 = (\varrho - 2)\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right);$$

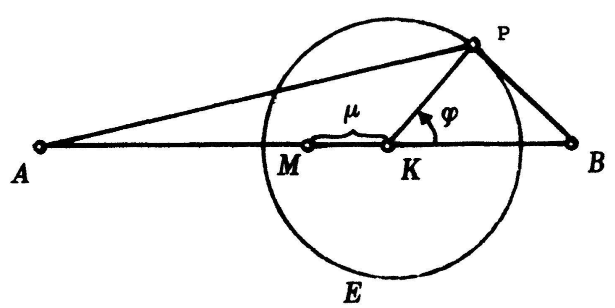
die Punkte z_1, z_2 liegen also auf der Geraden $z = \lambda \exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right)$, $\lambda \in R$, und zwar so, dass der Nullpunkt mit einem der Punkte zusammenfällt oder zwischen ihnen liegt. Es gelten $|z_1 - z_2| = 4$ und $|p_a(z)| = |z - z_1||z - z_2|$.
Um unsere Ungleichung zu beweisen, können wir einfach das folgende elementargeometrische Problem lösen:

Gegeben seien eine Strecke AB der Länge 4 und ein Kreis E mit Zentrum K auf AB und Radius 1. Zu zeigen ist, dass für alle Punkte P auf E

$$(AP)(BP) \le 5 \tag{2}$$

gilt.

Es bezeichnen M den Mittelpunkt von AB, μ die Länge (MK) und φ den Winkel zwischen KB und KP (siehe Figur). Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Fall $0 \le \mu \le 2$ beschränken.



Mit dem Cosinussatz erhält man $(AP)^2 = (2+\mu)^2 + 1 + 2(2+\mu)\cos\varphi$ und $(BP)^2 = (2-\mu)^2 + 1 - 2(2-\mu)\cos\varphi$; also ist (2) äquivalent zu

$$W_\mu(\cos) = (AP)^2(BP)^2 = R\cos^2\varphi + S\cos\varphi + T \le 25 \tag{3}$$

$$\text{mit } R = -4(4-\mu^2),\ S = 4\mu(\mu^2-3),\ T = (4-\mu^2)^2 + 2\mu^2 + 9.$$

Für $\mu = 2$ wird $W_2(\cos\varphi) = 8\cos\varphi + 17$ und (3) gilt offensichtlich. Es sei nun $0 \le \mu < 2$. Aufgrund der elementaren Theorie der quadratischen Gleichungen weiss man, dass

$$W_\mu(\cos\varphi) \le W(\xi) \text{ gilt, wobei } \xi = \max\left(1, -\frac{S}{2R}\right) \text{ ist. Demnach gelten}$$

$$W_\mu(\cos\varphi) \le W_\mu\left(-\frac{S}{2R}\right) = 25 + \frac{\mu^2(4\mu^2-15)}{4-\mu^2} \text{ für } -\frac{\mu}{2}\frac{3-\mu^2}{4-\mu^2} < 1 \text{ und}$$

$$W_\mu(\cos\varphi) \le W_\mu(1) = (3+\mu)^2(\mu-1)^2 \text{ für } -\frac{\mu}{2}\frac{3-\mu^2}{4-\mu^2} \ge 1.$$

Da in beiden Fällen die rechtsstehenden Ausdrücke den Wert 25 nicht übertreffen können, ist (2) bewiesen.
Der Beweis hat die «extremalen» Paare (z_1, z_2) der Ungleichung (1) mitgeliefert, nämlich $(1,1)$, $(1,-1)$ und $(-1,1)$.

N. Danikas, Fachbereich Mathematik, Aristoteles Universität
Thessaloniki, Griechenland

 0013-6018/88/060180-03$1.50+0.20/0

On Fermat's Last Theorem

In this note we shall prove the following theorem which pertains to Fermat's Last Theorem.

Theorem: *Let $x^n + y^n = z^n$ where x, y, z and n are positive integers such that $x<y<z$ and $n \ge 2$, then*

$$z < x^{1+\frac{1}{n-1}}. \tag{1}$$

Proof: As $z > y$, we have $z \ge y+1$, and so

$$x^n + y^n = z^n \ge (y+1)^n$$