

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- 4 Oppenheim A.: The Erdős Inequality and other Inequalities for a Triangle. Amer. Math. Monthly 68, 226–230 (1961).
- 5 Klamkin M. S.: Triangle Inequalities via Transforms. Notices of Amer. Math. Soc., A-103, 104, Jan. 1972.
- 6 Mitrinović D. S., Pčarić J. E., Volence V.: Recent Results in Geometric Inequalities. Amsterdam (to appear).
- 7 Klamkin M. S.: Solution to Aufgabe 677. Elem. der Math. 28, 130 (1973).
- 8 Janous W.: Problem 1137. Crux Math. 12, 79.

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/89/020041-07\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 981.** Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Das Polynom

$$f(x) = x^5 + x - t$$

ist über  $\mathbb{Z}$  irreduzibel, wenn  $t = \pm p^n$ ,  $p$  Primzahl,  $n \in \mathbb{N}$  und  $p^n > 2$ .

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

**Lösung.** Die Aussage ist wahr.

*Beweis.* Sei  $t = \pm q$  und  $q$  eine Primzahlpotenz. Falls ein quadratisches Polynom das Polynom  $x^5 + x - t$  teilt, so ist  $t = \pm 1$ . Der Ansatz

$$x^5 + x - t = (x^2 + a_1 x + a_0)(x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \quad a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$$

führt nämlich durch Koeffizientenvergleich und Elimination von  $b_0, b_1, b_2$  sofort auf

$$3 a_0 a_1^2 - a_1^4 - a_0^2 = 1 \quad \text{und} \quad a_0 a_1 (a_1^2 - 2 a_0) = t.$$

Deshalb sind  $a_0$  und  $a_1$  teilerfremde Teiler der Primzahlpotenz  $q$ , woraus  $a_0 = \pm 1$  oder  $a_1 = \pm 1$  folgt. In beiden Fällen schliesst man  $t = \pm 1$ .

Falls aber ein lineares Polynom  $x^5 + x - t$  teilt, so besitzt  $x^5 + x - t$  eine ganzzahlige Nullstelle, also  $t = \xi^5 + \xi$  für einen Teiler  $\xi$  von  $t$ ; insbesondere ist  $t$  gerade. Daraus folgt  $t = \pm 2$ .

*Bemerkung.* Die Polynome  $x^5 + x \pm y$  sind Beispiele für den folgenden Satz von V. G. Sprindžuk (Reducibility of polynomials and rational points on algebraic curves, Sémin de Théorie des Nombres, Prog. Math. 12 (1981), 287–309). Sei  $f \in \mathbb{Z}[x, y]$ , absolut irreduzibel (d. h. irreduzibel in  $C[x, y]$ ),  $\deg_x f \geq 2$ ,  $f(0, 0) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \neq 0$ ; dann ist für fast alle Primzahlpotenzen  $q$  das Polynom  $f(x, q)$  in  $\mathbb{Z}[x]$  irreduzibel.

A. Clivio, Stanford, USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Müller (Zürich), K. Schütte (München, BRD), M. Smid (Amsterdam, NL), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

*Bemerkung der Redaktion:* S. Rabinowitz zeigte inzwischen:  $x^5 + x - t$  zerfällt über  $\mathbb{Z}$  in irreduzible Faktoren 2. und 3. Grades g.d.w.  $t = \pm 1$  oder  $t = \pm 6$ , siehe S. Rabinowitz: The Factorization of  $x^2 \pm x + n$ , Math. Magazine 61 (1988), 191–193.

**Aufgabe 982.** Es seien  $s, n, m$  feste natürliche Zahlen und  $P$  die Menge aller Partitionen

$$s = \sum_{i=1}^n k_i$$

von  $s$  mit nichtnegativen ganzen Summanden  $k_i$ . Man bestimme

$$S(s, n, m) := \min_P \sum_{i=1}^n \binom{k_i}{m}.$$

J. Binz, Bolligen

**Lösung.** Es seien  $q = [s/n]$  und  $r = s - qn$ . Angenommen, unter den Partitionssummanden von  $s$  befinden sich zwei, etwa  $k_i = k$  und  $k_j = l$ , so daß  $k \geq l + 2$ . Dann gilt

$$\binom{k}{m} + \binom{l}{m} \geq \binom{k-1}{m} + \binom{l+1}{m} \quad (1)$$

In der Tat ist (1) äquivalent zu

$$\binom{k}{m} - \binom{k-1}{m} \geq \binom{l+1}{m} - \binom{l}{m}, \quad \text{d.h.} \quad \binom{k-1}{m-1} \geq \binom{l}{m-1}.$$

Wegen (1) erreicht man das Minimum, wenn die Partitionssummanden die Ungleichung  $|k_i - k_j| \leq 1, i, j = 1, \dots, n$ , erfüllen.

Deshalb müssen  $r$  Summanden den Wert  $q + 1$  und die übrigen  $n - r$  den Wert  $q$  haben. Folglich ist

$$S(s, n, m) = (n - r) \binom{q}{m} + r \binom{q+1}{m}.$$

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, NL) K. Schütte (München, BRD), P. Weisenhorn (Achern, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL).

**Aufgabe 983.** Für  $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0, k \geq n$  ist die Summe

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} (z - m)^n$$

geschlossen auszuwerten.

W. Koepf, Berlin

**Lösung** mit Verallgemeinerung auch für  $k < n$ .  
 Mittels der binomischen Entwicklung erhält man

$$\begin{aligned} P_{n,k}(z) &:= \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} (z-m)^n = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^{n-i} (-m)^i \\ &= \sum_{i=0}^n \left( \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} (-m)^i \right) \binom{n}{i} z^{n-i} = (-1)^k k! \sum_{i=0}^n (-1)^i S(i,k) \binom{n}{i} z^{n-i}, \end{aligned}$$

wo

$$S(i,k) := \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} m^i, \quad S(0,0) := 1$$

die bekannten Stirlingzahlen 2. Art bezeichnen, für welche insbesondere gilt  $S(i,k) = 0$  für  $i < k$  und  $S(k,k) = 1$  für  $k \geq 0$  (vgl. [1], [2]).

So erhält man das Resultat

$$P_{n,k}(z) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } k > n \geq 1 \\ (-1)^k k! \sum_{i=k}^n (-1)^i S(i,k) \binom{n}{i} z^{n-i} & \text{für } 1 \leq k < n \\ n! & \text{für } k = n \geq 0. \end{cases}$$

*Bemerkungen.* Diese zweiparametrische Polynomschar besitzt die erzeugenden Funktionen

$$\begin{aligned} G(z,s,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(z) \frac{s^k t^n}{k! n!} = e^{zt} e^{s(1-e^{-t})} \\ H(z,s,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(z) \frac{s^k t^n}{n!} = \frac{e^{zt}}{1+s(e^{-t}-1)}. \end{aligned}$$

Die Polynome  $P_{n,k}(z)$  können auch mit Hilfe der aus  $\binom{k}{m} = \binom{k-1}{m} + \binom{k-1}{m-1}$  zu gewinnenden Rekursionsformel  $P_{n,0}(z) = z^n$ ;  $P_{n,k}(z) = P_{n,k-1}(z) - P_{n,k-1}(z-1)$  eindeutig ermittelt werden.

Weiter gilt die bemerkenswerte Umkehrformel

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} P_{n,k}(z) = (z-m)^n \quad \text{für } m \in \mathbb{C}.$$

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Comtet L.: Advanced combinatorics. Reidel, Boston 1974.
- 2 Riordan J.: Combinatorial identities. Wiley, New York 1968.

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bracken (Toronto, CD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (Stockdorf, BRD), K. Schütte (München, BRD), J. Schwaiger (Graz, A), H.-J. Seiffert (Berlin), M. Smid (Amsterdam, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), H. M. Srivastava (Victoria, CD), P. Weisenhorn (Achern, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL), M. Vowe (Therwil).

**Aufgabe 984.** Es seien  $\alpha, \beta, \gamma$  die Innenwinkel,  $r$  der Inkreisradius und  $R$  der Umkreisradius eines ebenen Dreiecks. Man zeige, dass

$$\frac{2R^2 - 2Rr - r^2}{4R^2} \leq \sin^4(\alpha/2) + \sin^4(\beta/2) + \sin^4(\gamma/2) \leq \frac{4R^2 - 8Rr + 3r^2}{4R^2}$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

D. M. Milosevic, Pranjani, YU

**Lösung.** Wegen  $\sin^4 x = \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^2 2x$  für jedes reelle  $x$  ist

$$\begin{aligned} S &:= \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \sin^4 \frac{\beta}{2} + \sin^4 \frac{\gamma}{2} \\ &= \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \\ &= 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S = 1 - \frac{r}{2R} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{16R^2}$$

und somit ist die behauptete Ungleichung äquivalent mit

$$24Rr - 12r^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$$

mit Gleichheit jeweils genau im gleichseitigen Fall. Diese letzte Ungleichungskette ist aber wohlbekannt (vgl. [1], S. 53).

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Bottema O. et al.: Geometric inequalities. Groningen: Wolters-Noordhoff Publ. 1969.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten S. Z. Arslanagic, (Trebinje, YU), E. Braune (Linz, Teillösung), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), P. Weisenhorn (Achern, BRD), M. Vowe (Therwil).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. Oktober 1989 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 1005.** Man beweise: Die durch

$$x_1 = 1, \quad x_n = e - n \cdot x_{n-1} \quad (e \text{ ist die Eulersche Zahl})$$

rekursiv definierte Zahlenfolge  $(x_n)$  strebt mit wachsendem  $n$  gegen Null und divergiert (in dieser Form) bei der Berechnung auf jedem Computer.

R. Wyss, Flumenthal

**Aufgabe 1006.** Einem Rechteck  $PQRS$  sollen  $2k \geq 4$  Kreise  $K_i, K'_i$  wie folgt eingelagert werden:  $K_1$  berührt das Rechteck im Mittelpunkt  $C$  der Seite  $SP$ ;  $K_2$  berührt  $K_1$  in  $B$  und das Rechteck im Mittelpunkt  $A$  der Seite  $QR$ .  $K_i$  berührt  $K_1, K_{i-1}$  und die Rechteckseite  $QR$  ( $i = 3, 4, \dots, k$ , falls  $k > 2$ );  $K_{k+1}$  berührt  $K_1, K_k$  und die Rechteckseiten  $QR, RS$  und  $SP$ . Die Kreise  $K'_i$  ( $i = 3, 4, \dots, k+1$ ) sind die Spiegelbilder der Kreise  $K_i$  an der Achse  $AC$ .

Für welche Rechtecke ist eine solche Einlagerung möglich?

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 1007.** In einer Ebene seien ein Dreieck  $\Delta$  mit den Ecken  $A_1, A_2, A_3$  und ein Punkt  $P$ , der auf keiner Seite von  $\Delta$  liegt, gegeben.  $K_1$  sei der Kegelschnitt, der die beiden von  $A_1$  ausgehenden Dreiecksseiten in  $A_2$  bzw.  $A_3$  berührt und durch  $P$  geht. Analog sei der Kegelschnitt  $K_2$  definiert. Die beiden Kurven besitzen ausser der Geraden  $A_1 A_2$  noch eine weitere Tangente  $t$ . Man zeige: Bewegt sich  $P$  auf einer durch  $A_3$  verlaufenden Ecktransversalen von  $\Delta$ , so dreht sich  $t$  um einen festen Punkt  $T$ .

C. Bindschedler, Küsnacht

**Aufgabe 1008.** Man zeige, dass für beliebige reelle  $a, b, c$

$$(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) + 3(abc)^{2/3} \geq 0.$$

S. Gaschkov, Moskau, U.d.S.S.R.

**Berichtigung:** Die letzte Formelzeile in Aufgabe 1001 (Heft 1989/1) muss richtig wie folgt lauten:

$$A(k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i 4^{-i} i! C(i) S(k, i).$$