Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Proof: By Theorem 1 and Lemma 4:

$$\sum_{n \leqq x} \log P(n) = \sum_{n \leqq x} \left[\frac{\varphi(n)}{2} \log 2\pi - \tfrac{1}{2} \Lambda(n) \right] =$$

$$= \frac{\log 2\pi}{2} \sum_{n \leqq x} \varphi(n) - \tfrac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) =$$

$$= \frac{\log 2\pi}{2} \left(\frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x) \right) - \tfrac{1}{2} O(x) =$$

$$= \frac{3 \log 2\pi}{2\,\pi^2} x^2 + O(x \log x).$$

The authors wish to thank the referee for valuable suggestions.

J. Sándor, Jud. Harghita, Romania and L. Tóth, Satu Mare, Romania

REFERENCES

1 Hardy, G. H. and Wright, E. M.: An introduction to the theory of numbers. Clarendon Press, Oxford 1960.
2 Pólya, G. and Szegő, G.: Problems and theorems in analysis. Springer Verlag Berlin, Heidelberg 1972.
3 Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: A course of modern analysis. Cambridge Univ. Press, 1969.

 0013-6018/89/030073-04$1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

Zu einer Aufgabe der Kombinatorik

A_p^k; $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei die Anzahl der Möglichkeiten, k (nicht zu unterscheidende) Dinge auf p (zu unterscheidende) Personen aufzuteilen. Das Resultat

$$A_p^k = \binom{p+k-1}{k}; \quad p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

wird im allgemeinen durch vollständige Induktion gewonnen, wobei

$$A_p^2 = \binom{p+2-1}{2}, \quad A_p^3 = \binom{p+3-1}{3}$$

als Induktionsanfang genommen und, in wenig überzeugender Weise, zur Gewinnung der Induktionshypothese herangezogen wird [1*]. Hier wird ein induktionsfreier Beweis von (1) gegeben, der die Rekursionsformel

$$A_p^k = A_{p-1}^k + A_p^{k-1} \tag{2}$$

benutzt.

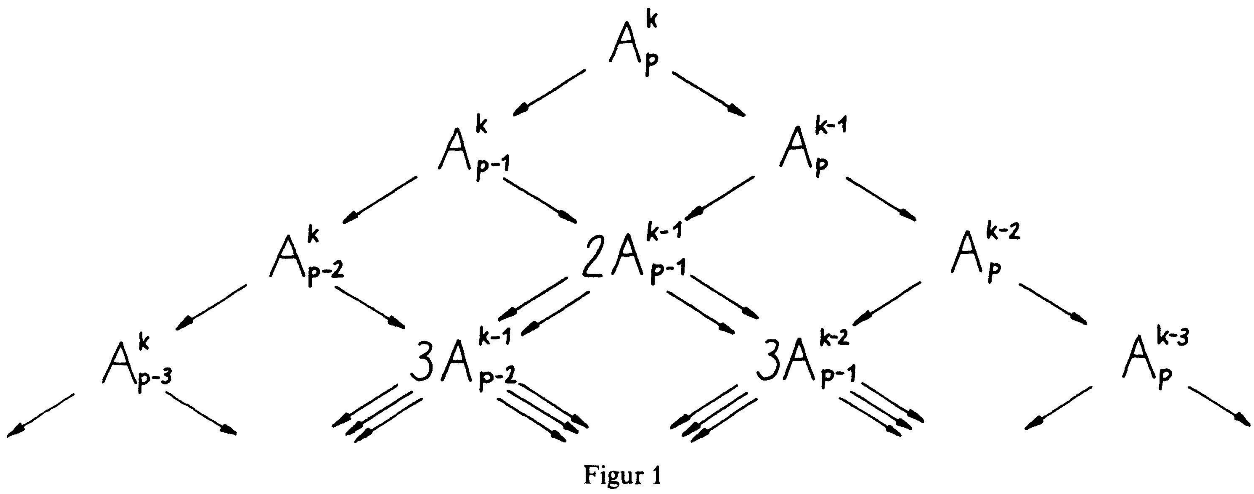
Beweis der Rekursionsformel: A_{p-1}^k zählt genau alle Möglichkeiten, k Dinge auf die p Personen $\underline{1}, \underline{2}, \ldots, \underline{p}$ aufzuteilen, bei denen $\underline{p}$ leer ausgeht. Die restlichen Möglichkeiten werden gerade von A_p^{k-1} gezählt wie man erkennt, wenn man jeweils ein $\underline{p}$ zugeteiltes Ding weglässt.
Nach obigem Beweis gilt (2) für $p > 1$, $k \geq 1$. Man rechnet leicht nach, dass (2) bei Erweiterung des Definitionsbereiches der Anzahlen A_p^k durch

$$A_p^k = 0; \quad p \notin \mathbb{N} \vee k \notin \mathbb{N}_0, \quad k, p \in \mathbb{Z}$$

nur für $p = 1$, $k = 0$ verletzt ist. Hier gilt

$$A_1^0 = 1 \neq 0 + 0 = A_0^0 + A_1^{-1}. \tag{2'}$$

Bildet man ausgehend von A_p^k das folgende Anzahldreieck



Figur 1

so stellt die Rekursionsformel (2) sicher, dass die Zeilensummen dieses Anzahldreiecks alle gleich, somit gleich A_p^k sind. Die Ähnlichkeit von (2) mit der dem Aufbau des Pascal-Dreiecks zugrundeliegenden Rekursionsformel

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

bewirkt, daß die im Anzahldreieck auftretenden Koeffizienten für sich gerade das Pascal-Dreieck bilden, in seiner $(\mu + \nu)$-ten Zeile und ν-ten Schrägzeile [2*] somit der Term

$$\binom{\mu + \nu}{\nu} A_{p-\nu}^{k-\mu} \tag{3}$$

steht. In der $(k + p + 1)$-ten Zeile des Anzahldreiecks finden sich nun nur noch – nach der erweiterten Definition – verschwindende Anzahlen, dementsprechend verschwindet auch diese Zeilensumme. Der Anfangsbetrag A_p^k muß also unterwegs verlorengegangen sein. Dies konnte nur an der einen Stelle geschehen, an der die Rekursionsformel verletzt ist. Aufgrund von (3) und (2′) geht an dieser Stelle gerade der Beitrag

$$\binom{k+p-1}{p-1} A_{p-(p-1)}^{k-k} = \binom{k+p-1}{p-1} = \binom{p+k-1}{k}$$

verloren, womit (1) bewiesen ist.

K. Burde, TU Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 Kirsch A.: Eine moderne einprägsame Fassung der kombinatorischen Grundaufgaben. Didaktik der Mathematik (DdM), München 1973/2, p. 113–130.
2 Von Mangoldt H. und Knopp K.: Einführung in die höhere Mathematik. Band I, Stuttgart 1955.

ANMERKUNGEN

[1*] Siehe etwa [2], Nr. 23. A_p^k ist die dortige «Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von p Dingen mit unbeschränkter Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung». In der heute üblichen Terminologie ist A_p^k die Anzahl der isotonen Wörter der Länge k

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_k};\quad i_j \leqq i_{j+1} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, k-1$$

über einem Alphabet vom Umfang p: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Ein solches Wort, in dem der Buchstabe α_j genau v_j mal auftritt, entspricht dabei der Aufteilung, bei der die j-te Person v_j der aufzuteilenden Dinge erhält. Siehe hierzu etwa [1].

[2*] Die Numerierung beginnt wie beim Pascal-Dreieck jeweils mit Null.

 0013-6018/89/030076-03$1.50+0.20/0