Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 985. Welche Normale eines Kegelschnittes begrenzt zusammen mit dem Kegelschnitt ein Segment minimaler Fläche?

H. Widmer, Rieden

Lösung des Aufgabenstellers (Bearbeitung der Redaktion).
Die gesuchten Normalen sind diejenigen, welche mit den Kegelschnittachsen den Winkel 45° bilden.

Beweis. Für die *Ellipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ lautet die Gleichung einer Normalen n mit der Steigung $m > 0$:

$$n: (b^2m^2 + a^2)^{1/2}(mx - y) + m(b^2 - a^2) = 0. \tag{1}$$

Durch die das Flächenverhältnis invariant lassende Normalaffinität $(x, y) \mapsto (x, ay/b)$, welche die Ellipse in den Kreis $k: x^2 + y^2 = a^2$ abbildet, geht n über in die Gerade

$$(b^2m^2 + a^2)^{1/2}(amx - by) + am(b^2 - a^2) = 0 \tag{2}$$

welche mit k genau dann ein minimales Segment begrenzt, wenn ihr Abstand $d(m)$ vom Mittelpunkt 0 maximal ist. Nach (2) ist aber

$$d^2(m) = a^2(b^2 - a^2)^2 m^2/(a^2m^2 + b^2)(b^2m^2 + a^2). \tag{3}$$

Nullsetzen der 1. Ableitung von (3) führt auf $m(m^2 + 1)(m^2 - 1) = 0$ mit der positiven Lösung $m = 1$.
Die *Hyperbel* $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ besitzt unter den Nebenbedingungen $a/b < m < b/a$ Normalen mit der Steigung $m > 0$, welche die Kurve in zwei Punkten $P_i = (x_i, y_i)$ schneiden ($i = 1, 2$, Normale in P_1). Man findet

$$x_1 = -a^2(b^2m^2 - a^2)^{-1/2},$$
$$x_2 = a^2((a^2 + 2b^2)m^2 + a^2b^2)/(b^2 - a^2m^2)\ (b^2m^2 - a^2)^{1/2}.$$

Für die Segmentfläche ergibt sich durch Integration

$$F(m) = a^2b^2(a^2 + b^2)\frac{m(m^2 + 1)}{(b^2 - a^2m^2)(b^2m^2 - a^2)} + \frac{ab}{2}\ln\frac{(bm - a)(b - am)}{(bm + a)(b + am)}.$$

Die Minimumbedingung führt auf $(m^2 + 2)(2m^2 + 1)(m^2 - 1) = 0$ mit der positiven Lösung $m = 1$.
Für die *Parabel* $x^2 = 2py$ verläuft die Normale mit positiver Steigung m durch die Punkte mit den Abszissen

$$x_1 = -p/m, \quad x_2 = 2pm + p/m.$$

Man erhält daraus für die Segmentfläche

$$F(m) = (2p^2/3)(m^2+1)^2/m^3,$$

und aus der Minimumbedingung $(m^2+1)^2(m^2-1) = 0$ folgt wiederum als einzige positive Lösung $m = 1$.

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Sierre; Teillösung), K. Schütte (München, BRD), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 986. Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 8, \quad a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} - a_n \quad \text{für} \quad n \geqq 1.$$

Man berechne den Wert der Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (\log(a_n+1) - \log(a_n-1)).$$

M. Vowe, Therwill

Solution. The answer is: $S = \log 3$. This follows from the following more general result, on substituting $A = 3$, and $a_n = u_{n+1}$.

Proposition. Let $A \in \mathbb{Z}$, $A \geqq 3$. Define (u_n) by

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = A \cdot u_{n+1} - u_n \quad \text{for} \quad n \geqq 0.$$

Then

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{u_n+1}{u_n-1} = \frac{A}{A-2}.$$

Proof. Put $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (A + \sqrt{A^2-4})$. Then α and α^{-1} are the roots of the equation $x^2 = A \cdot x - 1$. It is easy to show (e.g. by induction) that

$$u_n = (\alpha^n - \alpha^{-n})/\sqrt{A^2-4} \quad \text{for} \quad n \geqq 0.$$

We now have

$$\begin{aligned} \frac{u_n+1}{u_n-1} &= \frac{\alpha^n - \alpha^{-n} + \sqrt{A^2-4}}{\alpha^n - \alpha^{-n} - \sqrt{A^2-4}} = \frac{\alpha^{2n} + \sqrt{A^2-4} \cdot \alpha^n - 1}{\alpha^{2n} - \sqrt{A^2-4} \cdot \alpha^n - 1} \\ &= \frac{(\alpha^n - \alpha^{-1}) \cdot (\alpha^n + \alpha)}{(\alpha^n + \alpha^{-1}) \cdot (\alpha^n - \alpha)} = \frac{(\alpha^{n+1} - 1) \cdot (\alpha^{n-1} + 1)}{(\alpha^{n+1} + 1) \cdot (\alpha^{n-1} - 1)}. \end{aligned}$$

It follows that

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{u_n+1}{u_n-1} = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha^{n+1}-1)\cdot(\alpha^{n-1}+1)}{(\alpha^{n+1}+1)\cdot(\alpha^{n-1}-1)}$$

$$= \prod_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^n-1}{\alpha^n+1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n+1}{\alpha^n-1} = \frac{(\alpha+1)\cdot(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)\cdot(\alpha^2-1)}$$

$$= \frac{\alpha^2+1}{(\alpha-1)^2} = \frac{A\cdot\alpha}{A\cdot\alpha-2\cdot\alpha} = \frac{A}{A-2}. \qquad \square$$

B. M. M. de Weger, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU) P. Bracken (Toronto, CD), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL).

Aufgabe 987. Man bestimme die kleinste reelle Zahl r und die grösste reelle Zahl s derart, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gilt:

$$\left(\frac{a+b}{r}\right)^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{s}\right)^{b-a}.$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Lösung. Man betrachte die in $D_f = \{x \mid 1 < x < \infty\}$ definierte und (beliebig oft) differenzierbare Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \exp\left(\frac{x \ln x}{x-1}\right). \tag{1}$$

Wir wollen zeigen, daß $f(x)$ streng monoton fällt. Die Bedingung hierfür lautet:

$$f'(x) < 0, \; x \in D_f.$$

Durch logarithmische Ableitung ergibt sich aus (1)

$$f'(x) = \frac{f(x)}{(x-1)^2}\left(2\frac{x-1}{x+1} - \ln x\right). \tag{2}$$

Wegen $f(x) > 0$ ist für die Monotonie nur das Vorzeichen von

$$\varphi(x) := 2\frac{x-1}{x+1} - \ln x$$

von Interesse. Es gilt

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 0 \quad \text{für jedes } x \in D_f .$$

Folglich ist $\varphi(x)$ streng monoton fallend, und wegen $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = 0$ gilt $\varphi(x) < 0$ für alle $x \in D_f$. Damit ist nach (2) auch $f'(x) < 0$, d.h. $f(x)$ nimmt in D_f monoton ab. Weiterhin folgt aus

$$g(x) := \ln f(x) = \frac{\ln x}{x-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

unter Anwendung der l'Hospitalschen Regel und mit Rücksicht auf die Monotonie

$$\inf g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \inf_{x \in D_f} f(x) = 1$$

$$\sup g(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \ln\frac{e}{2} \quad \Rightarrow \sup_{x \in D_f} f(x) = \frac{e}{2}.$$

Man hat also

$$1 < f(x) < \frac{e}{2}, \quad x \in D_f . \tag{3}$$

Setzt man jetzt $x = \dfrac{b}{a} > 1$ $(0 < a < b)$, so geht (3) durch identische Umformungen über in

$$\left(\frac{a+b}{e}\right)^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{b-a}.$$

Die in der Aufgabe genannte Ungleichung gilt demzufolge für alle $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r \geqq e$, $0 < s \leqq 2$, wobei unter den zulässigen Zahlen $r = e$ die kleinste, $s = 2$ die grösste ist.

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 988. For $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 0$, let $f(t) = I_m(t)/I_n(t)$, where

$$I_p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k+p}}{k!\,(k+p)!}$$

is the modified Bessel function of the first kind and order $p\,(p \in \mathbb{N})$. Prove that f is increasing on $(0, \infty)$ with limit 0, if $t \downarrow 0$ and limit 1, if $t \to \infty$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Lösung. Offenbar ist $I_p(t) \geqq 0$ in $t \geqq 0$ mit Gleichheit genau für $t = 0$. Demnach ist $f := I_m/I_n$ bei ganzzahligen $m > n \geqq 0$ in $t \geqq 0$ definiert. Aus

$$I_p(t) = \frac{1}{p!}\left(\frac{t}{2}\right)^{\gamma}(1 + O(t^2)) \quad \text{bei} \quad t \to 0 \tag{1}$$

bzw.

$$(2\pi t)^{1/2} e^{-t} I_p(t) \to 1 \qquad \text{bei} \quad t \to \infty \tag{2}$$

(vgl. [1], S. 377) folgen die beiden behaupteten Limesaussagen sofort. Das streng monotone Anwachsen von f in $t \geqq 0$ zeigen wir, indem wir $f'(t) > 0$ in $t > 0$ nachweisen. Wegen $I_n^2 f' = I'_m I_n - I_m I'_n$ reicht dazu der Nachweis, dass $g := I'_m I_n - I_m I'_n$ in $t > 0$ positiv ist. Hierzu wiederum beachten wir die aus (1) folgende Formel

$$g(t) = \frac{m-n}{2\,m!\,n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{m+n-1}(1 + O(t^2)) \quad \text{bei} \quad t \to 0,$$

weshalb g für alle genügend kleinen $t > 0$ positiv ist. Aus der Differentialgleichung $t^2 I''_p + t I'_p - (t^2 + p^2) I_p = 0$ (vgl. [1], S. 374) ergibt sich ausserdem

$$g'(t) + \frac{1}{t} g(t) = \frac{m^2 - n^2}{t^2} I_m(t) I_n(t). \tag{3}$$

Angenommen nun, g hätte in $\mathbb{R}_+$ Nullstellen; wegen (3) sind diese einfach und isoliert. Ist t_0 die kleinste derartige Nullstelle, so folgt $g'(t_0) > 0$ aus (3), andererseits aber

$$g'(t_0) = \lim_{t \uparrow t_0} \frac{g(t_0) - g(t)}{t_0 - t} \leqq 0$$

aus $g(t) > 0$ für $0 < t < t_0$. Der erzielte Widerspruch zeigt $g(t) > 0$ für all $t > 0$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Abramowitz M. und Stegun I. A.: Handbook of Mathematical Functions (Ninth Printing). Dover Publ. Inc., New York 1970.

B. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), K. Schütte (München, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1989* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 1009. n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ ($k \geqq 2$) werden einmal linear, ein andermal kreisförmig so angeordnet, dass die Summe zweier Nachbarglieder stets von $k+1$ verschieden ist. Für beide Fälle bestimme man die Anzahl der zulässigen Anordnungen.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1010. Es sei

$$F(z) := \prod_{h=1}^{\infty} (1 + z^{10^h}), \quad |z| < 1.$$

Mit $\varepsilon := \exp(2\pi i/99)$ werde gesetzt

$$G(z) := (1/99) \sum_{j=0}^{98} F(\varepsilon^j z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k, \quad |z| < 1.$$

Man zeige, dass $g_k \neq 0$ für unendlich viele k und ermittle das kleinste $k > 0$ mit $g_k \neq 0$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 1011. Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei folgendermassen rekursiv definiert:

$$f(1) = 1, \quad f(2n) = f(n) + g(n-1), \quad f(2n+1) = f(n+1) + g(n/2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $g(x)$ die kleinste Zweierpotenz $> x$ bezeichnet. Man zeige, dass f involutorisch ist, d.h. dass $f(f(n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

K. Schütte, München, BRD

Aufgabe 1012. Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ sei

$$I_n := \int_0^{\infty} (1 + x^n)^{-1/2}\, dx.$$

Man gebe mindestens ein Zahlenpaar (r, s) mit $r \neq s$ an, derart, dass das Verhältnis I_r/I_s rational ist.

M. Vowe, Therwil