

# Das Volumen spezieller konvexer Polytope

Autor(en): **Martini, Horst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 5

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41617>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 44

Nr. 5

Seiten 113–144

Basel, September 1989

## Das Volumen spezieller konvexer Polytope

Während der Oberwolfacher Tagung über «Konvexe Körper» im Jahre 1974 wurde das folgende Problem von E. Heil (siehe auch [2], Nr. 23): gestellt: «Sei  $Q$  die konvexe Hülle von  $d$  Strecken im  $\mathbb{R}^d$ . Ist das Volumen von  $Q$  nicht kleiner als das Volumen eines Simplexes  $S$ , welches durch Translate dieser  $d$  Strecken mit gemeinsamem Endpunkt definiert ist?»

In der Arbeit [6] gab P. McMullen eine positive Antwort zu einer natürlichen Verallgemeinerung dieses Problems, zusätzlich mit Kennzeichnungen des Gleichheitsfalles. Es soll nun hier ein elementargeometrischer, rein induktiver Beweis zu Heil's ursprünglichem Problem vorgelegt werden, d. h. die entsprechend eingeschränkte Form von McMullen's Antwort wird, einschließlich der Charakterisierungen des Gleichheitsfalles, elementar bewiesen.

Für grundlegende Begriffe und Bezeichnungen sei auf [3] verwiesen. Insbesondere bezeichne  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) den  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und Einheitssphäre  $S^{d-1}$ . Weiterhin steht  $\mathbb{K}^d$  für die Menge der konvexen Körper, d. h. der kompakten, konvexen Untermengen des  $\mathbb{R}^d$  mit inneren Punkten.

Das äussere  $(d-1)$ -Quermaß  $\bar{V}_{d-1}(K, u)$  von  $K \in \mathbb{K}^d$  in Richtung  $u \in S^{d-1}$  ist der Flächeninhalt der orthogonalen Projektion von  $K$  in der Hyperebene  $H_u := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u \rangle = 0\}$ , während das innere 1-Quermass  $V_1(K, u)$  von  $K$  bezüglich  $u$  die maximale Länge einer Sehne dieses Körpers in Richtung  $u$  angibt (vgl. [1], § 7).

Seien nun  $p$  und  $q$  zwei Randpunkte von  $K \in \mathbb{K}^d$  in verschiedenen, parallelen Stützhyperebenen dieses Körpers. Wir nennen  $K$  einen *schiefen Doppelkegel* bezüglich der Richtung  $u = \lambda(p - q)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , wenn jeder Randpunkt dieses Körpers mit wenigstens einem der Punkte  $p, q$  durch eine Randstrecke von  $K$  verbunden werden kann.

Wie allgemein bekannt ist (siehe z. B. [4]), gilt für das Volumen  $V_d(K)$  eines konvexen Körpers  $K \in \mathbb{K}^d$  und jede Richtung  $u \in S^{d-1}$  die Ungleichung

$$V_d(K) \geq \frac{1}{d} \bar{V}_{d-1}(K, u) \cdot V_1(K, u). \quad (1)$$

Wir werden (1) bestätigen und außerdem zeigen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn  $K$  schiefer Doppelkegel bezüglich  $u$  ist (vgl. auch [5]). Hierfür sei  $P = \text{conv}\{p, q\}$  eine Sehne von  $K$  in Richtung  $u$  mit der Länge  $V_1(K, u)$  und  $E$  eine beliebige abgeschlossene 2-Halbebene mit der Randgeraden  $L$  durch  $p$  und  $q$ . Die Menge  $E \cap K$  enthält ein (möglicherweise entartetes) Dreieck mit Basis  $P$  und einem Randpunkt von  $E \cap K$  mit maximalem Abstand von  $L$  als Gegenecke. Mit dem Satz von Fubini erhält man die rechte Seite von (1) durch Integration über all diesen Dreiecken, und wegen der Konvexität von  $K$  hat man Gleichheit in (1) genau dann, wenn für jedes  $E$  die Menge  $E \cap K$  mit dem beschriebenen Dreieck zusammenfällt.

Das ist offensichtlich äquivalent zu der Eigenschaft von  $K$ , schiefer Doppelkegel bezüglich  $u$  zu sein.

Schliesslich sei  $L_1, \dots, L_d$  als System von  $d$  Strecken mit  $d$  linear unabhängigen Richtungen eingeführt. Es gilt nun das folgende

**Theorem:** Die  $d$ -dimensionalen konvexen Körper  $Q$  und  $S$  seien dem eingangs formulierten Heilschen Problem entsprechend gegeben. Dann gilt

$$V_d(Q) \geq V_d(S) > 0$$

mit Äquivalenz der Eigenschaften

$$(A) \quad V_d(Q) = V_d(S),$$

$$(B) \quad \text{bd } Q = \cup \{ \text{conv} \{x_1, \dots, x_d\} \mid x_i \in \text{rel bd } L_i \text{ mit } i = 1, \dots, d \},$$

$$(C) \quad \text{conv} \{x_1, \dots, x_d\} \subseteq \text{bd } Q \text{ gilt für alle } x_i \in \text{rel bd } L_i \text{ mit } i = 1, \dots, d.$$

**Beweis:** Die Richtigkeit des Satzes für  $d = 2$  als Basis der Induktion über  $d$  ist klar. Die Gültigkeit der Aussagen sei nun für den  $\mathbb{R}^{d-1}$  angenommen, wobei die Punktmenge  $Q'$ ,  $S'$  und  $L_1, \dots, L_{d-1}$  entsprechend die Bedingungen des Heilschen Problems erfüllen sollen und  $V_{d-1}(\cdot)$  für das korrespondierende Volumen steht. Somit gilt im  $\mathbb{R}^{d-1}$  die Ungleichung  $V_{d-1}(Q') \geq V_{d-1}(S')$  mit Äquivalenz von

$$(A') \quad V_{d-1}(Q') = V_{d-1}(S'),$$

$$(B') \quad \text{bd } Q' = \cup \{ \text{conv} \{x'_1, \dots, x'_{d-1}\} \mid x'_i \in \text{rel bd } L_i \text{ mit } i = 1, \dots, d-1 \},$$

$$(C') \quad \text{für alle } x'_i \in \text{rel bd } L_i \text{ (} i = 1, \dots, d-1 \text{) gilt } \text{conv} \{x'_1, \dots, x'_{d-1}\} \subseteq \text{bd } Q'.$$

Da die Richtungen der Strecken  $L_1, \dots, L_d$  im  $\mathbb{R}^d$  linear unabhängig sind, kann das System  $L_1, \dots, L_{d-1}$  als Bild von  $L_1, \dots, L_{d-1}$  bei orthogonaler Projektion  $\pi$  des  $\mathbb{R}^d$  auf den  $(d-1)$ -Raum  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u_d \rangle = 0\}$  mit  $u_d = \lambda(y_d - z_d)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , interpretiert werden, indem  $L_d = \text{conv} \{y_d, z_d\}$  als beliebige Strecke des Originalsystems verstanden sein soll. Die Induktionsvoraussetzung impliziert nun

$$\bar{V}_{d-1}(Q, u_d) \geq \bar{V}_{d-1}(S, u_d) \tag{2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn für  $L_1, \dots, L_{d-1}$  die Bedingungen

$$\pi(L_d) \in \text{conv}(L_1, \dots, L_{d-1}),$$

(A'), (B') und (C') gelten. Darüber hinaus hat man

$$V_1(Q, u_d) \geq V_1(S, u_d) \tag{3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn (wie im Falle eines Simplexes  $S$ )  $L_d$  eine Sehne maximaler Länge von  $Q$  in der Richtung von  $L_d$  ist. Da jede Facette (d.h.  $(d-1)$ -Seitenfläche) eines  $d$ -Simplexes  $S$  genau  $d$  Ecken aus der gesamten Eckenmenge (bestehend aus  $y_d, z_d$

und  $d - 1$  weiteren Punkten) enthält, gehören  $y_d$  oder  $z_d$  (oder beide) zu jeder Facette dieses Polytops. Nach Definition ist  $S$  demzufolge schiefer Doppelkegel bezüglich  $u_d$ , und

$$V_d(S) = \frac{1}{d} \bar{V}_{d-1}(S, u_d) \cdot V(S, u_d) \tag{4}$$

muß gelten. Mit Blick auf (1), (2) und (3) erhält man also  $V_d(S) \leq V_d(Q)$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn diese auch in jeder der drei Beziehungen (in (1) für  $K = Q$ ) erfüllt ist. Wir werden nun zeigen, daß somit die Äquivalenz von (A'), (B') und (C') auf die  $d$ -dimensionale Konfiguration übertragen wird. Bezeichnet  $Z(u_d)$  den *Stützzylinder* (d. h. die Vereinigung aller Stützgeraden) von  $Q$  in Richtung  $u_d$ , so gilt  $\bar{V}_{d-1}(Q, u_d) = \bar{V}_{d-1}(S, u_d)$  genau dann, falls (B') die Beziehung

$$\begin{aligned} &(\text{conv} \cup \{L_1, \dots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d) \\ &= \cup \{ \text{conv} \{x_1, \dots, x_{d-1}\} \mid x_i \in \text{rel bd } L_i, i = 1, \dots, d - 1 \} \end{aligned} \tag{5}$$

impliziert und, entsprechend, die schwächere Forderung (C') auf die Inklusion

$$\begin{aligned} \text{conv} \{x_1, \dots, x_{d-1}\} \subseteq [(\text{conv} \cup \{L_1, \dots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d)] \\ \text{für alle } x_i \in \text{rel bd } L_i (i = 1, \dots, d - 1) \end{aligned} \tag{6}$$

führt.

In (3) gilt Gleichheit genau dann, wenn  $y_d, z_d$  in parallelen Stützhyperebenen von  $Q$  liegen. Gilt zusätzlich (1), dann muß  $K = Q$  schiefer Doppelkegel bezüglich  $u_d$  sein. Aus der Definition eines solchen konvexen Körpers kann man sofort schlussfolgern, dass genau alle Punkte der Menge  $Q \cap Z(u_d)$  sowohl mit  $y_d$  als auch mit  $z_d$  durch im Rand von  $Q$  liegende Strecken verbunden werden können. Mit (5), (6) und

$$(\text{conv} \cup \{L_1, \dots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d) \subseteq Q \cap Z(u_d)$$

impliziert diese Eigenschaft die Äquivalenz von (A), (B) und (C).

Horst Martini, Sektion Mathematik, Pädagogische Hochschule, Dresden

#### LITERATUR

- [1] Bonnesen T., Fenchel W.: Theorie der konvexen Körper, Neuauflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1974.
- [2] Gruber P., Schneider R.: Problems in Geometric Convexity. Ed. by P. Gruber and J. M. Wills: Contributions to Geometry. Proc. Geom. Sympos. Siegen 1978, pp. 255–278, Birkhäuser, Basel 1979.
- [3] Grünbaum B.: Convex Polytopes. Wiley, London, New York, Sydney 1967.
- [4] Macbeath A. M.: A compactness theorem for affine equivalence classes of convex regions. Canad. J. Math. 3, 54–61 (1951).
- [5] Martini H.: A new view on some characterizations of simplices, Arch. Math. (to appear).
- [6] McMullen P.: The volume of certain convex sets. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91, 91–97 (1982).