

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1990)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

sowie

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \binom{a}{k+1} (1+x)^{a-k-1}.$$

Der Satz von Taylor liefert somit für  $f$  die Darstellung

$$f(x) = \binom{a}{k+1} (1+cx)^{a-k-1} x^{k+1}, \quad 0 < c < 1.$$

Schließlich erhalten wir

$$\binom{a}{k+1} x^{k+1} \left[ (1+x)^a - \sum_{p=0}^k \binom{a}{p} x^p \right] = \binom{a}{k+1}^2 x^{2(k+1)} (1+cx)^{a-k-1} \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann gleich Null ist, wenn

$$\binom{a}{k+1} = 0.$$

Horst Alzer  
University of the Witwatersrand, Johannesburg

#### LITERATUR

1 Gerber L.: An extension of Bernoulli's inequality. Amer. Math. Monthly 75, 875–876 (1968).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/020053-02\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 1005.** Man beweise: Die durch

$$x_1 = 1, \quad x_n = e - n \cdot x_{n-1} \quad (e \text{ ist die Eulersche Zahl})$$

rekursiv definierte Zahlenfolge  $(x_n)$  strebt mit wachsendem  $n$  gegen Null und divergiert (in dieser Form) bei der Berechnung auf jedem Computer

R. Wyss, Flumenthal

**Lösung** (Bearbeitung der Redaktion). Es sei  $\varepsilon$  der Rundungsfehler (Maschinenfehler) von  $e$  bei der Berechnung der  $x_n$  auf dem Computer. Diese erfolgt also gemäss

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = e + \varepsilon - n x_{n-1}.$$

Man zeigt leicht durch vollständige Induktion, dass

$$x_n = (-1)^n n! \frac{\varepsilon}{e} + (e + \varepsilon) s_n,$$

wobei

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}.$$

Die Abschätzung

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (n+1)^{-k-1} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

zeigt, dass  $s_n \rightarrow 0$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \varepsilon = 0 \\ +\infty & \text{wenn } \varepsilon \neq 0. \end{cases}$$

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Guggenheimer (New York, USA), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), A. Müller (Zürich), B. Ruh (Solothurn), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), G. Unger (Dornach), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

**Aufgabe 1006.** Einem Rechteck  $PQRS$  sollen  $2k \geq 4$  Kreise  $K_i, K'_i$  wie folgt eingelagert werden:  $K_1$  berührt das Rechteck im Mittelpunkt  $C$  der Seite  $SP$ ;  $K_2$  berührt  $K_1$  in  $B$  und das Rechteck im Mittelpunkt  $A$  der Seite  $QR$ .  $K_i$  berührt  $K_1, K_{i-1}$  und die Rechteckseite  $QR$  ( $i = 3, 4, \dots, k$ , falls  $k > 2$ );  $K_{k+1}$  berührt  $K_1, K_k$  und die Rechteckseiten  $QR, RS$  und  $SP$ . Die Kreise  $K'_i$  ( $i = 3, 4, \dots, k = 1$ ) sind die Spiegelbilder der Kreise  $K_i$  an der Achse  $AC$ .

Für welche Rechtecke ist eine solche Einlagerung möglich?

J. Binz, Bolligen

**Lösung** des Aufgabenstellers. Wir legen die Gauss-Ebene so, dass  $AC$  auf der reellen Achse liegt und  $K_1$  der Einheitskreis mit Zentrum  $O$  ist; so werden  $C = -1, B = 1$  und  $A = \alpha > 1$ . Die Moebius-Abbildung  $f(z) = \frac{-\beta z + 1}{z - \beta}$  hat die Fixpunkte 1 und  $-1$ , und

es gilt  $f(\infty) = -\beta$ . Wählt man z. B.  $\beta = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ , so wird  $f(\alpha) = \beta$ . Sind  $G, H$  die Geraden  $QR$  resp.  $SP$ , so werden  $f(K_1) = K_1, f(G) = G'$  (ein zu  $K_1$  konzentrischer Kreis mit Radius  $\beta$ ) und  $f(H) = H'$  (ein Kreis mit Durchmesser  $(-1, -\beta)$ , der dem Kreisring  $K_1, G'$ ) eingeschrieben ist). Die  $2k - 1$  Kreise  $f(K_i)$  und  $f(K'_i)$  ( $i \geq 2$ ) bilden zusammen mit  $H'$  eine dem Kreisring  $(K_1, G')$  eingeschriebene geschlossene Kreiskette. Damit die Einlagerung möglich ist, muss für  $\varphi = \frac{\pi}{2k}$  die Bedingung  $\sin \varphi = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$  erfüllt sein. Daraus folgt  $\alpha = \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} = 1 + 2 \tan^2 \varphi$ . Ist  $d'$  der Berührungspunkt von  $f(K_{k+1})$  mit  $H'$ , also z. B.  $d' = -\sqrt{\beta}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , so wird

$$d = f^{-1}(d') = \frac{\beta d' + 1}{d' + \beta} = -1 + \frac{\beta + 1}{\sqrt{\beta}} i = -1 + \frac{2}{\cos \varphi} i.$$

Das Verhältnis der Rechteckseiten wird dann

$$\lambda = \frac{2 \operatorname{Im}(d) + \alpha + 1}{\alpha + 1} = 1 + \frac{2}{\cos \varphi (1 + \tan^2 \varphi)} = 1 + 2 \cos \varphi.$$

Die Einlagerung ist genau dann möglich, wenn das Verhältnis der Rechteckseiten

$$\lambda = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{2k} \text{ beträgt.}$$

Weitere Lösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), G. Unger (Dornach).

**Aufgabe 1007.** In einer Ebene seien ein Dreieck  $\Delta$  mit den Ecken  $A_1, A_2, A_3$  und ein Punkt  $P$ , der auf keiner Seite von  $\Delta$  liegt, gegeben.  $K_1$  sei der Kegelschnitt, der die beiden von  $A_1$  ausgehenden Dreiecksseiten in  $A_2$  bzw.  $A_3$  berührt und durch  $P$  geht. Analog sei der Kegelschnitt  $K_2$  definiert. Die beiden Kurven besitzen ausser der Geraden  $A_1 A_2$  noch eine weitere Tangente  $t$ . Man zeige: Bewegt sich  $P$  auf einer durch  $A_3$  verlaufenden Ecktransversalen von  $\Delta$ , so dreht sich  $t$  um einen festen Punkt  $T$ .

C. Bindschedler, Künsnacht

**Lösung.** Durch eine projektive Abbildung werden die Punkte  $A_1, A_2, A_3$  und  $P$  auf die uneigentlichen Punkte  $A'_1, A'_2$  der Koordinatenachsen, den Punkt  $A'_3 = (0, 0)$  und den Punkt  $P' = (1, 1)$  abgebildet. Hierbei werden die Kegelschnitte  $K_1$  und  $K_2$  auf die Parabeln  $x^2 = y$  und  $y^2 = x$  abgebildet. Diese Parabeln haben ausser der uneigentlichen Geraden genau eine weitere gemeinsame Tangente  $t'$ , nämlich in den Punkten  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  und  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ . Daher haben auch die Kegelschnitte  $K_1$  und  $K_2$  ausser der Geraden  $A_1 A_2$  genau eine weitere gemeinsame Tangente  $t$ , die auch die uneigentliche Gerade sein kann. Die Tangente  $t'$  hat die Gleichung

$$x + y + \frac{1}{4} = 0.$$

Für die Schnittpunkte  $S', T'$  der Geraden  $A'_3 P', t'$  mit der uneigentlichen Geraden folgt, dass  $A'_1, A'_2, S', T'$  in harmonischer Lage sind. Da diese Eigenschaft projektiv invariant ist, gilt auch für die Schnittpunkte  $S, T$  der Geraden  $A_3 P, t$  mit der Geraden  $A_1 A_2$ , dass  $A_1, A_2, S, T$  in harmonischer Lage sind.

Bewegt sich der Punkt  $P$  auf der durch  $A_3$  verlaufenden Geraden, so bleibt der Punkt  $S$  fest. Dann bleibt auch der vierte zu  $A_1, A_2, S$  harmonische Punkt  $T$  fest. Daher geschieht bei dieser Bewegung von  $P$  folgendes: Hat die Tangente  $t$  einen eigentlichen Schnittpunkt  $T$  mit der Geraden  $A_1 A_2$ , so wird sie um diesen Punkt  $T$  gedreht. Andernfalls wird sie parallel verschoben, wobei die uneigentliche Gerade als eine Parallele der Geraden  $A_1 A_2$  aufzufassen ist.

K. Schütte, München, BRD

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden).

**Aufgabe 1008.** Man zeige, dass für beliebige reelle  $a, b, c$

$$(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) + 3(abc)^{2/3} \geq 0.$$

S. Gaschkov, Moskau, U.d.S.S.R.

**Solution.** Let  $F(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca) + 3(abc)^{2/3}$ . Since  $F$  is symmetric in  $a, b, c$  and satisfies  $F(a, b, c) \geq F(|a|, |b|, |c|)$ , it is enough to prove  $F(a, b, c) \geq 0$  assuming that  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Then we have

$$a + b - c \geq 2(ab)^{1/2} - c \geq 0. \tag{1}$$

In the weighted G.M.-A.M. inequality

$$x^{1/4} y^{3/4} \leq \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y \quad (x, y \geq 0)$$

we set  $x = c^2, y = (abc)^{2/3}$ , thus obtaining

$$4c(ab)^{1/2} \leq c^2 + 3(abc)^{2/3}. \tag{2}$$

In view of (1) and (2),

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= (a + b - c)^2 - 4ab + 3(abc)^{2/3} \\ &\geq (2(ab)^{1/2} - c)^2 - 4ab + 3(abc)^{2/3} \\ &= c^2 - 4c(ab)^{1/2} + 3(abc)^{2/3} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

**Remark.** Equality in (1) holds if and only if  $a = b$ , and in (2) if and only if  $c = 0$  or  $c^2 = ab$ . Hence we have equality if and only if  $a = b = c$  or  $a = b$  and  $c = 0$ .

M. E. Kuczma, Warszawa, Polen

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Irminger (Wetzikon), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. Oktober 1990 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 1028.** Man bestimme die Nullstellen der Polynome

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{2n-2k} 2^{2n-2k} (x-1)^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hj. Stocker, Wädenswil

**Aufgabe 1029.** Genau welche natürlichen Zahlen treten als Diagonalenlängen von (nicht ausgearteten) Quadern oder Rechtecken mit natürlichen Zahlen als Seitenlängen auf?

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

**Aufgabe 1030.** Man zeige: Für jede natürliche Zahl  $n$  existiert eine Bijektion  $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0$  derart, dass

$$f^n(x) = 1/x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_0.$$

Dabei sei  $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , und  $f^n$  bezeichne die  $n$ -te Iterierte von  $f$  (also  $f^1 := f$ ,  $f^k := f^{k-1} \circ f$  für  $k = 2, \dots, n$ ). Wie lässt sich  $f$  effektiv konstruieren?

J. Binz, Bolligen  
B. Schindler, Könitz