

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1990)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Die Polynome von Yang-Lee und ihre Nullstellen  
**Autor:** Hueter, Irene / Carnal, Henri  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42419>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

- [7\*] Ein linearer Operator heisst *kompakt*, wenn er jede beschränkte Menge in eine Menge transformiert, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist, äquivalent dazu, wenn er jede beschränkte Folge in eine Folge transformiert, die eine konvergente Teilfolge enthält. Ein kompakter linearer Operator transformiert jede schwach konvergente Folge in eine stark konvergente, und ist der betreffende Raum reflexiv (wie z. B.  $\ell^p$  und  $L^p$  mit  $1 < p < \infty$ ), so gilt auch die Umkehrung.
- [8\*] Beispiele von Folgen- und Funktionenräumen, die Riesräume bilden, findet man z. B. in G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 3. Aufl. (American Mathematical Society, Providence, RI 1967), Kap. XV, wo auch Banachverbände ausführlich behandelt werden.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/050117-14\$1.50 + 0.20/0

## Die Polynome von Yang-Lee und ihre Nullstellen

### 1. Einführung

Das Ising-Modell der statistischen Mechanik führt zur Untersuchung der Nullstellen spezieller Polynome in einer komplexen Variablen. Je nach den Werten der beteiligten Parameter befinden sich diese Nullstellen auf dem Einheitskreis, auf der negativen reellen Halbachse oder auf der Vereinigung der beiden Mengen. Es gibt aber auch Fälle, in denen sie diese Vereinigungsmenge verlassen.

Das Ising-Modell benützt einen Graphen  $G$ , dessen Eckpunkte  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  die Lage der Teilchen markieren und dessen Kanten  $\{i, j\} \in K$  Teilchenpaare verbinden, welche in Wechselwirkung stehen. Für jedes Teilchen ist ein Spin  $\sigma_i \in \{+1, -1\}$  gegeben und die Energie des Systems berechnet sich aus

$$E = -J \sum_{\{i, j\} \in K} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i. \quad (1.1)$$

Dabei ist  $H$  die Magnetfeldstärke und  $J$  eine Konstante, die bei ferromagnetischen Wechselwirkungen positiv, bei antiferromagnetischen negativ ist. Summiert man über alle  $2^n$  Werte des Vektors  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , so erhält man die «Partitionsfunktion»

$$Z_n = \sum_{\sigma} e^{-E/kT} = \sum_{\sigma} \exp(J_1 \sum_{\{i, j\} \in K} \sigma_i \sigma_j + H_1 \sum_i \sigma_i) \quad (1.2)$$

( $k$  ist die Boltzmann'sche Konstante,  $J_1 = J/kT$  die Temperatur- und  $H_1 = H/kT$  die Magnetfeldvariable). Die freie Energie ist dann

$$f(T, H) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{kT}{n} \log Z_n. \quad (1.3)$$

Singularitäten dieser Funktion entstehen dort, wo sich Nullstellen der  $Z_n$  häufen, und erscheinen physikalisch als Phasenübergänge. Es ist deshalb wichtig, Aussagen über die Lösungen von  $Z_n = 0$  zu gewinnen.

Wir beschränken uns hier auf den Fall  $H = 0$ . Man kann dann  $Z_n$  im Wesentlichen als erzeugende Funktion interpretieren: man betrachtet die  $\sigma_i$  als unabhängige Zufallsvaria-

blen mit  $P(\sigma_i = 1) = P(\sigma_i = -1) = \frac{1}{2}$ , definiert als  $X$  die Anzahl  $\{i, j\} \in K$  mit  $\sigma_i \neq \sigma_j$  und hat (mit  $u = \exp(-2J_1)$ ):

$$Z_n = 2^n E(\exp J_1 (|K| - 2X)) = 2^n e^{J_1 |K|} E(u^X). \tag{1.4}$$

Man kann auch den allgemeineren Fall eines Graphen mit  $n$  Eckpunkten betrachten, in welchem  $p_i = P(\sigma_i = 1)$  und  $q_i = 1 - p_i = P(\sigma_i = -1)$  ortsabhängige Grössen sind und die Wechselwirkungen zwischen den Punkten  $i$  und  $j$  durch Werte  $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$  (anstelle von 0 oder 1) gegeben werden. Man setzt dann

$$X = \sum_{\sigma_i=1, \sigma_j=-1} a_{ij}, \tag{1.5}$$

betrachtet die erzeugende Funktion

$$\Psi_n(u, p_1, \dots, p_n) = E(u^X) = \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in A} p_i (\prod_{j \notin A} q_j u^{a_{ij}}) \tag{1.6}$$

und fragt wieder nach deren Nullstellen. Ungewohnt ist hier, dass  $u$  als fester Parameter und die  $p_i$  als Variablen aufgefasst werden. Somit ist  $b_{ij} = u^{a_{ij}}$  das Element einer gegebenen, symmetrischen Matrix.

Man definiert jetzt  $z_i = p_i/q_i$  und

$$\varphi_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in A} z_i (\prod_{j \notin A} b_{ij}). \tag{1.7}$$

Wegen  $\Psi_n = q_1 q_2 \dots q_n \varphi_n$  genügt es, die Nullstellen von  $\varphi_n$  zu untersuchen. Wir werden in § 3 einige Spezialfälle behandeln, erinnern aber zuerst in § 2 an ein berühmtes Resultat von Yang und Lee [4].

## 2. Der ferromagnetische Fall

**Satz 2.1.** *Gilt  $0 < b_{ij} \leq 1$ , so hat das Polynom  $\phi_n(z) = \varphi_n(z, \dots, z)$  lauter Nullstellen auf dem Einheitskreis  $S_1$ .*

*Bemerkung.* Es ist  $z = p/q$ , also  $|z| = 1 \Leftrightarrow |p| = |q| = |1 - p| \Leftrightarrow \operatorname{Re} p = \frac{1}{2}$ . Wer denkt da nicht an die Riemann'sche Vermutung?

*Beweis.* Aus Stetigkeitsgründen kann man  $b_{ij} < 1$  annehmen. Man verifiziert leicht die Identitäten

$$\begin{aligned} \varphi_n(z_1, \dots, z_n) &= z_n \left( \prod_{j \neq n} b_{jn} \right) \varphi_{n-1}(z_1 b_{1n}^{-1}, z_2 b_{2n}^{-2}, \dots, ) \\ &\quad + \varphi_{n-1}(z_1 b_{1n}, z_2 b_{2n}, \dots, z_{n-1} b_{n-1, n}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\varphi_n(z_1, \dots, z_n) = z_1 z_2 \dots z_n \varphi_n(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}). \tag{2.2}$$

Wir beweisen durch vollständige Induktion über  $n$ :

$$|z_1| = \dots = |z_n| \leq 1, \quad \varphi_n(z_1, \dots, z_n) = 0 \Rightarrow |z_1| = \dots = |z_n| = 1. \quad (2.3)$$

Der Fall  $n=1$  ist trivial. Es sei etwa (Gegenannahme)  $|z_1| = \dots = |z_k| = 1$ ,  $|z_{k+1}| < 1, \dots, |z_n| < 1$ ,  $\varphi_n(z_1, \dots, z_n) = 0$ . Man lässt dann  $z_n$  gegen 0 streben, bestimmt  $z_{k+1} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  so, dass  $\varphi_n = 0$  bleibt ( $\varphi_n$  ist ein Polynom 1. Grades in  $z_{k+1}$ ) und lässt die übrigen  $z_i$  konstant. Aus (2.1), aus der Induktionsannahme für den 2. Summanden und aus  $|z_i| \leq 1 \Rightarrow |z_i b_{in}| < 1$  sieht man, dass  $|z_{k+1}| > 1$ , falls  $z_n = 0$ . Man kann also einen Wert von  $z_n$  mit  $|z_n| < 1$  finden, für welchen  $|z_{k+1}| = 1$  wird. Setzt man das Vorgehen fort, so erreicht man  $|z_1| = \dots = |z_{n-1}| = 1$ , jedoch  $|z_n| < 1$ . Nach (2.2) ist aber in diesem Fall  $\varphi_{n-1}(z_1 b_{1n}^{-1}, z_2 b_{2n}^{-1}, \dots) = z_1 \dots z_{n-1} (\prod b_{jn})^{-1} \varphi_{n-1}(\bar{z}_1 b_{1n}, \bar{z}_2 b_{2n}, \dots)$  und die Auflösung von (2.1) nach  $z_n$  ergibt  $|z_n| = 1$ ! Somit hat  $\phi_n(z)$  keine Nullstelle mit  $|z| < 1$  und, wegen (2.2), auch keine mit  $|z| > 1$ .

### 3. Beispiele für den antiferromagnetischen Fall

Wir wollen hier, wie im ursprünglichen Problem, nur die Werte  $a_{ij} = 1$  (falls  $\{i, j\} \in K$ ) oder 0 zulassen, d. h.  $b_{ij} = u = \exp(-2J_1) > 1$  oder  $b_{ij} = 1$ . Auch nach dieser Einschränkung lässt sich keine so einfache Aussage wie in § 2 gewinnen. In besonderen Fällen liegen die Nullstellen von  $\phi_n$  auf der negativen reellen Halbachse: das wichtigste Beispiel dafür ist das zweidimensionale Gitter (Kanten zwischen  $(i_1, i_2)$  und  $(i_1 \pm 1, i_2)$  sowie  $(i_1, i_2 \pm 1)$ ), das von Onsager [1] behandelt wurde. Nach zwei ähnlichen Modellen geben wir jedoch auch Gegenbeispiele, in denen einige Nullstellen auf  $S_1$  bleiben oder sogar die Menge  $\mathbb{R}_- \cup S_1$  verlassen.

#### 3.1. Der vollständige Graph

Es sei  $b_{ij} = u > 1$  für alle Paare  $\{i, j\}$  mit  $i \neq j$ , also nach (1.7):

$$\phi_n(z) = \varphi_n(z, \dots, z) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} u^{k(n-k)} z^k. \quad (3.1)$$

**Satz 3.1.** Für  $u > 1$  hat das Polynom  $\phi_n$  von (3.1) einfache, negative Nullstellen  $0 > z_1 > z_2 > \dots > z_n$  mit  $z_{i+1}/z_i > u^2$ .

**Beweis.** Es seien  $0 > y_1 > y_2 \dots > y_{n-1}$  die Nullstellen von  $\phi_{n-1}$  mit  $y_{i+1}/y_i > u^2$  (Induktionsannahme). Aus der leicht verifizierbaren Beziehung

$$\phi_n(z) = \phi_{n-1}(uz) + zu^{n-1} \phi_{n-1}(z/u) \quad (3.2)$$

folgt  $\phi_n(0) > 0$ ,  $\phi_n(y_1/u) < 0$  ( $y_1/u^2 > y_1 \Rightarrow \phi_{n-1}(y_1/u^2) > 0$ ),  $\phi_n(uy_1) < 0$  ( $u^2 y_1 > y_2 \Rightarrow \phi_{n-1}(u^2 y_1) < 0$ ),  $\phi_n(y_2/u) > 0$ , usw. Also hat  $\phi_n$  (mindestens) eine Nullstelle in jedem der  $n$  Intervalle  $(y_1/u, 0)$ ,  $(y_2/u, uy_1)$ ,  $\dots$ ,  $(-\infty, uy_{n-1})$  q.e.d.

### 3.2. Der zyklische Graph

Sei  $b_{12} = b_{23} = \dots = b_{n-1,n} = b_{n1} = u, b_{ij} = 1 = \text{sonst}$ . Sei  $Y$  die Anzahl der  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  mit  $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$  und  $X = Y + 1_{\{\sigma_n \neq \sigma_1\}}$  ( $1_A$  ist die Indikatorfunktion der Menge  $A$ ). Dann gilt (mit  $z = p/q$ ):

$$\phi_n(z) = q^{-n} E(u^X) = q^{-n} \Psi_n(u, p). \tag{3.3}$$

Wir setzen, für  $\alpha, \beta \in \{+1, -1\}$

$$f_n(u, \alpha \beta) = E(u^Y 1_{\{\sigma_n = \beta\}} | \sigma_1 = \alpha) \tag{3.4}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & qu \\ pu & q \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

und erhalten die Rekursionsformel

$$f_{n+1}(u, \alpha, \beta) = \sum_{\gamma = \pm 1} f_n(u, \alpha, \gamma) \alpha_{\gamma\beta}. \tag{3.6}$$

Daraus folgt  $f_n(u, \alpha, \beta) = A_{\alpha\beta}^{n-1}$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} \Psi_n(u, p) &= p(f_n(u, 1, 1) + u f_n(u, 1, -1)) + q(u f_n(u, -1, 1) + f_n(u, -1, -1)) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} a_{\beta\alpha} f_n(u, \alpha, \beta) \Rightarrow \Psi_n = S p(A^n). \end{aligned}$$

Da  $A$  die charakteristische Gleichung  $A^2 = A + (u^2 - 1) p q I$  erfüllt, gilt ebenfalls (man multipliziert mit  $A^n$  und nimmt Spuren):

$$\Psi_{n+2}(u, p) = \Psi_{n+1}(u, p) + (u^2 - 1) p q \Psi_n(u, p). \tag{3.7}$$

Die Anfangswerte  $\Psi_1 = 1, \Psi_2 = 1 + 2 p q (u^2 - 1)$  erlauben die Schreibweise

$$\Psi_n(u, p) = P_n((u^2 - 1) p q) \tag{3.8}$$

$$P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 + 2x, \quad P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + x P_n(x). \tag{3.9}$$

Aus (3.9) ergibt sich  $P_n(-\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2})^{n-1}$ , sowie

**Satz 3.2.**  $P_n(x)$  besitzt reelle Nullstellen  $x_1^n > x_2^n > \dots$  und es gilt  $-\frac{1}{4} > x_1^{n+1} > x_1^n > x_2^{n+1} > x_2^n > \dots$

**Korollar 3.1.** Für  $u > 1$  hat  $\phi_n(z)$  negative Nullstellen, für  $|u| < 1$  Nullstellen auf  $S_1$ .

*Beweis.* Aus  $x = (u^2 - 1) p q < -\frac{1}{4}$  folgt im ersten Fall  $p q = z/(1+z)^2 = c < 0$ , im zweiten  $z/(1+z)^2 = d > \frac{1}{4}$  und man findet jeweils zwei Lösungen in der angegebenen Menge. Ist  $n$  ungerade, so kommt  $z = -1$  dazu.

**Bemerkung:** Rekursionsformeln der Form (3.7), in denen das charakteristische Polynom einer Matrix  $A$  erscheint, lassen sich in allgemeineren Fällen herleiten, führen aber nicht immer zu nützlichen Auskünften über die Lage der Nullstellen.

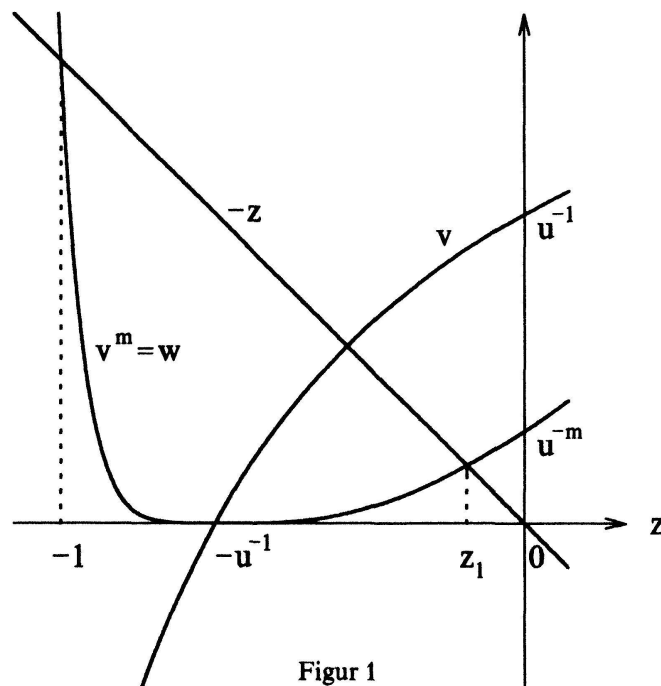
### 3.3. Einfache Bäume

Der Graph  $G$  hat hier die Eckpunkte  $0, 1, \dots, m$  ( $n = m + 1$ ) und die Kanten  $\{0, i\}$  für  $1 \leq i \leq m$ . Ist  $\sigma_0$  gegeben, so ist  $X = |\{i: \sigma_i \neq \sigma_0\}|$  binominalverteilt mit Parametern  $m, q$  (falls  $\sigma_0 = +1$ ) bzw.  $m, p$  (falls  $\sigma_0 = -1$ ). Daher gilt (mit  $z = p/q$ ):

$$\Psi_n(u, p) = E(u^X) = p(p + q^n)^m + q(p^n + q)^m \tag{3.10}$$

$$\Phi_n(z) = q^{-n} \Psi_n = z(z + u)^m + (zu + 1)^m. \tag{3.11}$$

**Satz 3.3.** Ist  $u > 1, m \geq 1$ , so hat das Polynom  $\Phi_n$  von (3.11) eine Nullstelle  $z_1 \in (-1, 0)$ , eine Nullstelle  $z_2 = z_1^{-1} \in (-\infty, -1)$  und  $n - 2$  Nullstellen auf  $S_1$ .



Figur 1

**Beweis.** a)  $\Phi_n(z) = 0$  heisst  $-z = v^m$  mit  $v = (zu + 1)/(z + u)$ . Fig. 1 (mit  $m$  gerade) zeigt, dass genau eine Lösung  $z_1 \in (-1, 0)$  existiert. Es gilt sogar  $z_1 > -u^{-m}$ . Die allgemeingültige Formel (2.2) beweist, dass auch  $z_2 = z_1^{-1}$  Nullstelle ist.

b) Ist  $z = e^{i\alpha} \in S_1$ , so setzen wir

$$\beta = f(\alpha) = \arg(u + e^{i\alpha}) = \arctan \frac{\sin \alpha}{u + \cos \alpha} \tag{3.12}$$

$$v = \frac{zu + 1}{u + z} = e^{i\alpha} \frac{u + e^{-i\alpha}}{u + e^{-i\alpha}} = e^{i(\alpha - 2\beta)}. \tag{3.13}$$

Aus  $-z = v^m$  ergibt sich  $\alpha - \pi + 2k\pi = m(\alpha - 2\beta)$  oder

$$\beta = \frac{m-1}{2m}\alpha - \frac{2k-1}{2m}\pi = g_k(\alpha). \tag{3.14}$$

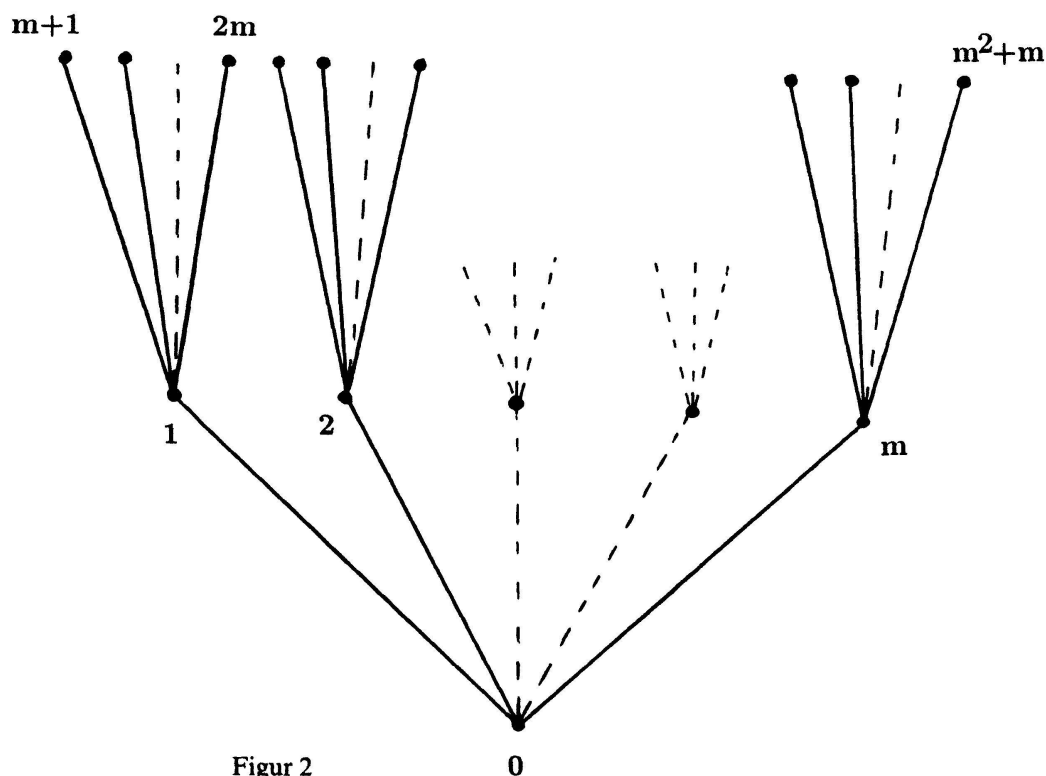
Für  $1 \leq k \leq m$  existiert eine Lösung  $\alpha_k$  von  $g_k(\alpha) = f(\alpha)$  in  $(0, 2\pi)$ , da  $g_k(0) < 0 = f(0)$ ,  $g_k(2\pi) > 0 = f(2\pi)$ .

Somit enthält  $S_1$  alle  $m-1 = n-2$  noch fehlenden Nullstellen von  $\Phi_n$ .

### 3.4. Zweistöckige Bäume

Der Graph von Fig. 2 hat  $n = 1 + m + m^2$  Eckpunkte sowie Kanten  $\{0, i\}$  und  $\{i, mi + j\}$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ). Wie in 3 c) bestimmt man zuerst  $\Psi_n(u, p) = E(u^X)$  und dann

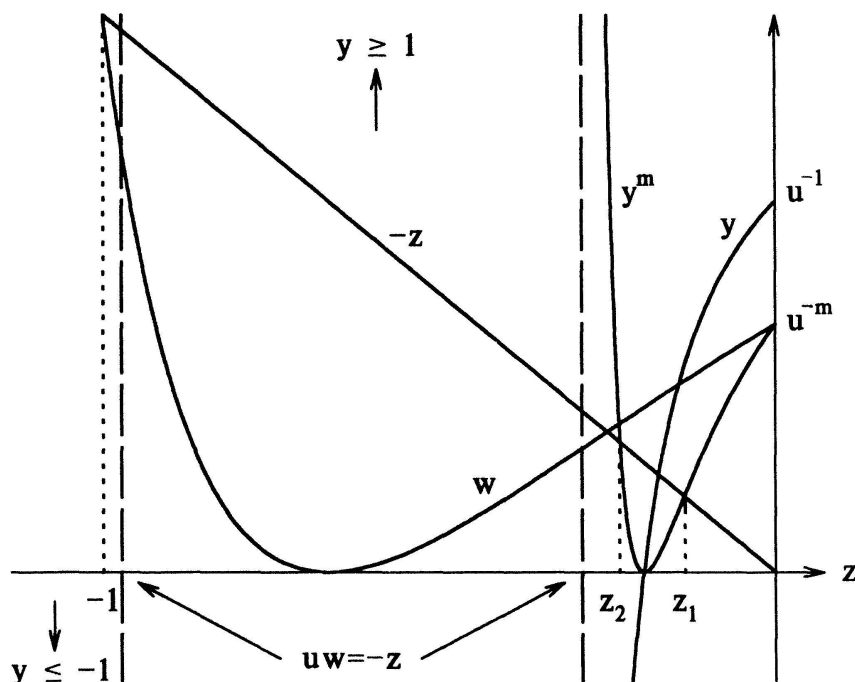
$$\Phi_n(z) = z[(z+u)^m z + (zu+1)^m u]^m + [(z+u)^m u z + (zu+1)^m]^m \tag{3.15}$$



Figur 2

**Satz 3.4.** Für  $u > 1$ ,  $m \geq 1$ , besitzt das Polynom  $\Phi_n$  von (3.15) 2 oder 4 Nullstellen in  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , je nachdem, ob  $m$  ungerade oder gerade ist. Zudem liegen  $m^2 - m + 1$  Nullstellen auf  $S_1$  und  $2m - 2$  oder  $2m - 4$  ausserhalb  $\mathbb{R} \cup S_1$ .

*Beweis.* a)  $\Phi_n(z) = 0$  bedeutet  $-z = y^m$  mit  $y = (zu+w)/(z+uw)$ ,  $w = v^m$ ,  $v = (zu+1)/(z+u)$ . Fig. 3 zeigt das entsprechende Bild auf  $(-1, 0)$  für ein gerades  $m$ . Es gibt offensichtlich zwei Lösungen  $z$ , und  $z_2$  von  $y_m = -z$ . Für ein ungerades  $m$  gäbe es nur eine. Dazu kommen  $z_1^{-1}$ , bzw.  $z_2^{-1} \in (-\infty, -1)$ .



Figur 3

b) Für  $z = e^{i\alpha}$  ist  $w = e^{i\gamma}$  mit  $\gamma = m(\alpha - 2\beta)$  (vgl. 3.13). Wir setzen  $\sigma = \alpha - \gamma = 2m\beta - (m - 1)\alpha$ ,  $\varepsilon = f(\sigma)$  und haben (wie bei 3.13)

$$y = \frac{zu + w}{z + uw} = \frac{\bar{w}zu + 1}{\bar{w}z + u} = e^{i(\sigma - 2\varepsilon)}.$$

Aus  $-z = y^m$  folgt  $\alpha - \pi = m(\sigma - 2\varepsilon) + 2k\pi$  oder

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2} + \frac{2k + 1}{2m}\pi - \frac{\alpha}{2m} = h_k(\alpha)$$

$$(\sigma = 2mf(\alpha) - (m - 1)\alpha, \varepsilon = f(\sigma)). \tag{3.16}$$

Für  $0 \leq k \leq (m^2 - m)/2$  ist  $h_k(0) > 0 = f \circ \sigma(0)$ ,  $h_k(\pi) \leq f \circ \sigma(\pi)$ , also existiert in  $(0, \pi]$  eine Lösung von  $h_k(\alpha) = f \circ \sigma(\alpha)$ , ( $\pi$  selber kommt für  $k = (m^2 - m)/2$  als Lösung vor). Zusammen mit den Lösungen  $z = \exp(-i\alpha)$  hat man (mindestens)  $m^2 - m + 1$  Nullstellen von  $\Phi_n$  auf  $S_1$ . Wir zeigen nun, dass  $h_k - f \circ \sigma$  auf  $(0, \pi)$  eine negative Ableitung besitzt. Daraus folgt, dass die angegebene Anzahl Nullstellen nicht überschritten wird: insbesondere gibt es für  $k \notin [0, (m^2 - m)/2]$  keine Lösung, da entweder  $h_k(0) < f \circ \sigma(0)$  oder  $h_k(\pi) > f \circ \sigma(\pi)$ . Es ist

$$\frac{dh_k}{d\alpha} - \frac{df}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{d\sigma}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} - \frac{1 + u \cos \sigma}{1 + 2u \cos \sigma + u^2} \right) - \frac{1}{2m}. \tag{3.17}$$

Ist  $\sigma' \leq 0$ , so ist der ganze Ausdruck negativ, da die Klammer positiv bleibt. Wegen  $\sigma'' = 2mf < 0$  gilt  $\sigma' > 0$  auf einem Intervall  $[0, \alpha_0)$ , wobei das Maximum in  $\alpha = 0$  erreicht



wird und  $2m/(1+u) - (m-1)$  beträgt. Weiter ist  $\sigma'(\alpha_0) = 2mf'(\alpha_0) - (m-1) = 0$ , d. h.  $f'(\alpha_0) = (m-1)/2m$ . Auf  $[0, \alpha_0)$  ist  $\sigma \geq 0$  (weil  $\sigma' > 0$ ) und  $\sigma \leq \alpha$  (weil  $f' \leq \frac{1}{2}$ , somit  $\sigma' \leq m - (m-1) = 1$ ). Da die Klammer von (3.17) monoton mit  $\sigma$  und  $\sigma$  monoton mit  $\alpha$  wächst, wird ihr Maximum in  $\alpha_0$  erreicht. Es beträgt, wegen  $\sigma(\alpha_0) \leq \alpha_0$ , höchstens  $\frac{1}{2} - f'(\alpha_0) = 1/2m$ . Insgesamt bleibt also der Ausdruck in (3.17) kleiner als

$$\left[ \frac{2m}{1+u} - (m-1) \right] \cdot \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m} = \frac{1-u}{2(1+u)} < 0.$$

Damit ist der Beweis beendet. Dieses letzte Beispiel lehrt, dass man starke Symmetrieeigenschaften des Graphen postulieren muss, um die Nullstellen an  $\mathbb{R}_-$  oder mindestens  $\mathbb{R}_- \cup S_1$  zu binden. Für weitere Diskussionen vgl. [2] und [3].

Irene Hueter und Henri Carnal  
Institut für mathematische Statistik, Universität Bern

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Onsager L.: Crystal Statistics I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. Phys. Rev. 65, 117 (1944).
- 2 Peitgen H.-O., Richter P. H.: The Beauty of Fractals. Springer Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1986.
- 3 V. Saarloos W., Kurtze D. A.: Location of zeros in the complex temperature plane. Absence of Lee-Yang theorem. J. Phys. A 17, 1301 (1984).
- 4 Yang C. N., Lee T. D.: Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions I, II. Phys. Rev. 87, 404, 410 (1952).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/050130-08\$1.50 + 0.20/0

## Kleine Mitteilung

### On a problem by Shapiro

In 1954, H. S. Shapiro proposed the following problem: determine the minimum of the cyclic sum

$$S_n(a) = \sum_{i=1}^n a_i / (a_{i+1} + a_{i+2}), \quad (1)$$

with  $a_i \geq 0$  and  $a_i + a_{i+1} > 0$  ( $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ ). He conjectured that this minimum is  $n/2$ . This is known to be true for  $n \leq 13$ , but false for  $n \geq 14$  (see [1] for reference, and the range  $15 \leq n \leq 23, n$  odd).

In the present work we propose a method which enables us to solve the problem for  $n < 7$ . The method is based on an application of Fourier transformation to functions of discrete argument.