Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 5

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Über die Payne-Pólya-Weinbergersche Vermutung

Die Normalschwingungen einer Membran, welche in der Ruhelage das Gebiet D überdeckt, sind von der Form $\exp[i\omega t]u(x)$, wobei $\mu=\omega^2$ die Eigenwerte und $u(x)$ die zugehörigen Eigenfunktionen des Problems

$$\Delta u+\mu u=0 \quad \text{in} \quad D, \quad u=0 \quad \text{auf} \quad \partial D$$

sind. Es ist wohlbekannt, dass eine abzählbare Menge von Eigenwerten $\mu_1<\mu_2\leq\mu_3\leq\ldots$ existiert, die sich im Unendlichen häufen.
1955 haben Payne, Pólya und Weinberger in einer Comptes Rendues Note der Pariser Akademie die folgende Vermutung ausgesprochen: μ_2/μ_1 *nimmt sein Maximum beim Kreis an.*
Sie leiteten die Abschätzung $\mu_2/\mu_1\leq 3$ her, die nicht allzu weit vom vermuteten Wert 2.539 ... ist. Diese Vermutung ist keineswegs offensichtlich, denn nach der Ungleichung von Rayleigh-Faber-Krahn nimmt unter allen Gebieten gleicher Fläche μ_1 sein Minimum und nach der Ungleichung von Szegö-Weinberger μ_2 sein Maximum beim Kreis an.
In den nachfolgenden Jahren wurde die Schranke für μ_2/μ_1 verbessert. Brands erhielt 1964 dafür den Wert 2.686, de Vries drei Jahre später 2.658 und Chiti kam 1983 auf 2.586.
Im letzten Jahr haben M. S. Ashbaugh und R. D. Benguria die Vermutung von Payne-Pólya-Weinberger inklusive das mehrdimensionale Analogon vollständig bewiesen.
Der Beweis ist äusserst raffiniert. Er stützt sich einerseits auf die Ideen von Payne-Pólya-Weinberger und Chiti zusammen mit einer neuen Ungleichung über die Nullstellen von Besselfunktionen.

C. Bandle, Mathematisches Institut der Universität, Basel

Aufgaben

Aufgabe 1037. In der Ebene eines Dreiecks ABC mit Seitenlängen a, b, c und Höhenschnittpunkt H sei ein von A, B, C verschiedener Punkt O gegeben. Mit

$$x:=a/OA, \quad y:=b/OB, \quad z:=c/OC$$

beweise man die Ungleichung

$$x+y+z\geq xyz$$

mit Gleichheit genau für $O=H$. Man diskutiere Spezialfälle.

G. Bercea, München, BRD

Solution. In the more usual triangle inequality notation, P is used for O (O is reserved for the circumcenter) and the proposed inequality is the known one

$$a_1 R_2 R_3 + a_2 R_3 R_1 + a_3 R_1 R_2 \geq a_1 a_2 a_3 \tag{1}$$

and is due to Hayashi (1913). A short history, a proof, and generalizations are given in this journal [1]. It was noted there that there was equality if the triangle was equilaterial and the point P corresponded to a vertex. Also, one can derive (1) as a dual inequality by inversion from the polar moment of inertia inequality

$$a_1 R_1^2 + a_2 R_2^2 + a_3 R_3^2 \geq a_1 a_2 a_3. \tag{2}$$

There is equality in (2) **iff** $P = I$ the incenter. It is not difficult to show that I transforms into H and vice-versa under the inversion which gives the general equality condition for (1). Another more direct way of getting the equality condition is to go back to the complex number proof of (1) using the identity (2) in [1], i.e.,

$$z_2 z_3 (z_2 - z_3) + z_3 z_1 (z_3 - z_1) + z_1 z_2 (z_1 - z_2) = -(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(z_1 - z_2). \tag{3}$$

If z_1, z_2, z_3, are now complex numbers from an arbitrary origin P (not a vertex) to the vertices of a triangle $A_1 A_2 A_3$, then (1) is immediately obtained by applying the triangle inequality to (3). There is equality **iff** all the terms of (3) have the same argument. This requires that

$$(z_2 - z_3)/z_1 = \lambda_1 z, \quad (z_3 - z_1)/z_2 = \lambda_2 z, \quad (z_1 - z_2)/z_3 = \lambda_3 z$$

where the λ_i's are positive real and z is a unit complex number. We then must also satisfy (3), i.e.,

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) z = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 z^3.$$

Hence, $z^2 = -1$ which implies that the P must be the orthocenter. The resultant identity $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ is then equivalent to

$$\tan A_1 + \tan A_2 + \tan A_3 = \tan A_1 \tan A_2 \tan A_3,$$

a well known identity for triangles.

The general polar moment of intertia inequality contains (1) and (2) as special cases. This is simply

$$(w_1 \boldsymbol{R}_1 + w_2 \boldsymbol{R}_2 + w_3 \boldsymbol{R}_3)^2 \geq 0 \tag{4}$$

where $\boldsymbol{R}_i$ is the vector from P to vertex A_i and the w_i's are arbitrary real numbers. Expanding out and simplifying, we obtain

$$(w_1 + w_2 + w_3)(w_1 R_1^2 + w_2 R_2^2 + w R_3^2) \geq w_2 w_3 a_1^2 + w_3 w_1 a_2^2 + w_1 w_2 a_3^2. \tag{5}$$

There is equality **iff** the centroid of the weights w_i at the corresponding vertices A_i is point P. To obtain (1), simply let $w_1 = a_1 R_2 R_3$, etc.; to obtain (2), simply let $w_1 = a_1$, etc. Incidentally, (4) generalizes to polytopes in E^n.

Many special cases of (5) where point P coincides with O, I, G, Ω, N, etc., and for various weights w_i are already given in the literature. In particular, see [2] which is the most comprehensive reference on inequalities of the triangle.

M. S. Klamkin, Edmonton, Alberta

REFERENCES

[1] Klamkin M. S.: Triangle inequalities from the triangle inequality. Elemente der Mathematik *34*, 49–55 (1979).
[2] Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Volenic, V.: Recent Advances in Geometric Inequalities. Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.

Weitere Lösungen sandten F. Bellot (Valladolid, Spanien), W. Janous (Innsbruck, A), K. Schütte (München, BRD), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 1038. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung

$$(x+2)^y = x^y + 2y^y.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Lösung. Offenbar sind alle $(x, 1)$ mit $x \in \mathbb{Z}$ Lösungen von (1). Sei also $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $y \neq 1$ eine weitere Lösung. Aufgrund des Mittelwertsatzes ist

$$2y^y = (x+2)^y - x^y = 2y\,w^{y-1}$$

mit ganzzahligem $w \in (x, x+2)$, also $w = x+1$.
Führen wir die Hilfsfunktion

$$f(t) := (1 + 1/t)^t - (1 - 1/t)^t; \quad t \neq -1, 0, 1$$

ein, so lautet (1) nunmehr: $f(x+1) = 2$.

a) $t < 0$, d.h. $t \leqq -2$: Aus

$$(1 + 1/t)^t \downarrow e \quad \text{und} \quad (1 - 1/t)^t \downarrow 1/e \quad \text{für} \quad t \downarrow -\infty$$

folgt $f(t) > e - (3/2)^{-2} > 2$.

b) $t > 0$: Entwickelt man $f(t)$ mit Hilfe des binomischen Satzes, so sieht man unmittelbar, dass $f(t) \geqq 2$ mit Gleichheit genau für $t = 2$, d.h. $x = 1$, $y = 2$.

Zusammengefasst hat sich somit ergeben: Die Paare $(x, 1)$ mit $x \in \mathbb{Z}$ sowie $(x, y) = (1, 2)$ sind genau die Lösungen von (1).

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten A. A. Jagers (Enschede, NL), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD).

Aufgabe 1039. Mit $k \in \mathbb{N}$ und $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei

$$a(k,m,n) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n+k+1-2^m j}{k-1}$$

a) Zeige: Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass

$$a(k,m,n) = 0 \quad \text{für} \quad n > N \quad \text{und alle} \quad k, m.$$

b) Man ermittle

$$b(k,m) := \sum_{n=0}^{N} a(k,m,n).$$

J. Binz, Bolligen

Lösung (mit Verallgemeinerung). Bei $k, p \in \mathbb{N}$ ist

$$c(k,p,q) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+q-1-pj}{k-1}$$

der q-te Taylorkoeffizient von

$$f_{k,p}(z) := (1-z)^{-k}(1-z^p)^k$$

um $z = 0$. Dies erkennt man aus der in $|z| < 1$ gültigen Formel

$$f_{k,p}(z) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-k}{i} z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{k}{j} z^{pj}\right) = \sum_{i,j} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+i-1}{k-1} z^{i+pj}$$
$$= \sum_{q=0}^{\infty} z^q \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+q-1-pj}{k-1};$$

dabei wurde

$$(-1)^i \binom{-k}{i} = \binom{k+i-1}{i} = \binom{k+i-1}{k-1}$$

verwendet. Wegen $f_{k,p}(z) = (1+z+\ldots+z^{p-1})^k$ verschwindet $c(k,p,q)$ für $q > k(p-1)$ und es gilt

$$\sum_{q=0}^{\infty} c(k,p,q) = f_{k,p}(1) = p^k. \tag{*}$$

Wegen $a(k,m,n) = c(k, 2^m, n+2)$ ergibt sich aus den bisherigen Feststellungen die Aufgabenlösung; insbesondere ist nach (*)

$$b(k,m) := \sum_{n=0}^{\infty} a(k,m,n) = \sum_{q=2}^{\infty} c(k, 2^m, q) = 2^{km} - 1 - (1 - \delta_{0,m})k$$

mit dem Kronecker-Symbol δ.

B. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten A. A. Jagers (Enschede, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1992* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1055. Man betrachte das hypothetische Tonsystem, das aus einer verhältnisgleichen Teilung der Oktave in n Intervalle hervorgeht ($n \geq 2$; charakteristisches Verhältnis $\sqrt[n]{2}$) und denke sich dann analog wie beim Zwölftonsystem n-Ton-Reihen gebildet.

a) Man zeige: Allintervall-Reihen existieren nur für gerade Indizes n.
b) Man zeige: Die Differenzen-Reihen zu den n-Ton-Allintervall-Reihen haben stets ein Anfangsglied, das von $\frac{1}{2}n$ verschieden ist.
c) Anstelle der Allintervall-Reihen vom Index n kann man auch die Differenzen-Reihen betrachten, aus denen Allintervall-Reihen hervorgehen. Es sind dies in der Sprache der Kombinatotik bestimmte injektive Wörter der Länge $n-1$ über dem Alphabet $1, 2, \ldots, n-1$ (Permutationen mit einer sehr speziellen Art von eingeschränkter Stellenbelegung). Zu jeder solchen Differenzen-Reihe gehört eine Klasse aus n Allintervall-Reihen, die durch Transponieren aus einer einzelnen Allintervall-Reihe erhalten werden können.
Man zeige: Unter den Differenzen-Reihen, die Allintervall-Reihen vom Index n festlegen, gibt es je gleichviele, die mit a und mit $n-a$ beginnen, wobei

$$a \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \ldots, n-1\right\}.$$

d) Zur Zeit ist noch keine Formel für die Anzahl f_n der Differenzen-Reihen bekannt, die Allintervall-Reihen vom Index n implizieren. Man kann daher die Zahlen f nur auf

dem Umweg über eine vollständige Auflistung der betreffenden Figuren-Mengen bestimmen.
Man stelle einen Auflist-Algorithmus für die Differenzen-Mengen zu den Allintervall-Reihen vom Index n auf.

Anmerkung

Rohmaterial einer Zwölfton-Komposition ist eine sog. Zwölfton-Reihe aus den 12 verschiedenen Tönen unseres temperierten Tonsystems. In einer solchen Reihe wird kein Ton wiederholt; sie besteht also aus genau 12 Tönen.
Den 12 Tönen liegt eine verhältnisgleiche Teilung der Oktave zugrunde, d.h. das charakteristische Frequenzverhältnis zwischen aufeinanderfolgenden Tönen ist $\sqrt[12]{2}$.
Innerhalb einiger zulässiger Veränderungen der Grund-Zwölfton-Reihe darf jeder Ton im Verlaufe eines Stückes in jeder Oktav-Lage auf- oder abwärts erscheinen; die Töne der Grund-Reihe legen also gewissermassen nur Oktav-Klassen fest. Dementsprechend ist es üblich, Zwölfton-Reihen mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 12$ zu beschreiben, wobei die 1 für unsere Zwecke willkürlich vergeben werden kann.

Beispiel einer Zwölfton-Reihe:

	a		b		dis		h		e		fis		c		cis		g		gis		d		f	
	1		2		7		3		8		10		4		5		11		12		6		9	
Differenzen-Reihe (Intervalle)		1		5		8		5		2		6		1		6		1		6		3		

Die jeweiligen Differenzen modulo 12 kennzeichnen die vorkommenden Intervalle.
Man spricht nun von einer *Zwölfton-Allintervall-Reihe,* wenn in der zugehörigen Differenzen-Reihe alle möglichen Intervalle auftreten.
Beispiel einer Zwölfton-Allintervall-Reihe:

1		6		2		3		5		9		12		10		4		11		8		7
	5		8		1		2		4		3		10		6		7		9		11	

M. Jeger, Zürich/Luzern

Aufgabe 1056. Let $\mu > 0$, $0 < \alpha < 1$ and let (a_n) be a real sequence recursively defined by $a_0 = \alpha$ and

$$a_{n+1} = a_n(1 - a_n^\mu); \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Show that

$$a_n \sim (\mu n)^{-1/\mu} \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

A. A. Jagers, Enschede, NL