Periodische Brüche und elementare Zahlentheorie

Autor(en): **Koch, Helmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **60 (2005)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10191

Elem. Math. 60 (2005) 1 – 9
0013-6018/05/010001-9

Elemente der Mathematik

Periodische Positionsbrüche und elementare Zahlentheorie

Helmut Koch

Helmut Koch studierte von 1952 bis 1957 Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin. Anschließend arbeitete er zwei Jahre in der Halbleiterforschung. Von 1959 bis 1991 arbeitete er im Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der DDR. Danach leitete er die Max-Planck-Arbeitsgruppe für Algebraische Geometrie und Zahlentheorie und war gleichzeitig als Professor für Mathematik an der Humboldt-Universität tätig. Seit 1998 befindet er sich im aktiven Ruhestand.

1 Einleitung

Jede rationale Zahl lässt sich als endlicher oder periodischer Dezimalbruch darstellen. Die hierbei auftretenden Gesetzmäßigkeiten führen auf Fragen der elementaren Zahlentheorie. Dieser Zusammenhang ist geeignet, das eigenständige Interesse von Schülern an der Mathematik zu wecken. Einige dieser Gesetzmäßigkeiten lassen sich auch als Sätze über natürliche Zahlen formulieren. Multipliziert man z.B. die Zahl $u = 142857$ mit 2, 3, 4, 5 und 6, so erhält man die zyklischen Permutationen der Ziffern der Zahl u (vergleiche Abschnitt 4, Beispiel 1).

Wir betrachten im folgenden allgemeiner Positionsbrüche für eine beliebige natürliche Zahl $g > 1$ als Basis.

Im zweiten Abschnitt zeigen wir, dass sich jeder Bruch im wesentlichen eindeutig als endlicher oder periodischer Positionsbruch darstellen lässt, und formulieren die Fragen, die sich aus dieser Darstellung ergeben. Im dritten Abschnitt beweisen wir einige Tatsachen aus der elementaren Zahlentheorie, die dann im vierten Abschnitt zur Lösung der gestellten Fragen führen.

Eine rationale Zahl, deren Nenner durch eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl teilbar ist, hat eine Dezimalbruchdarstellung als unendlicher periodischer Dezimalbruch. Die Eigenschaften der zugehörigen Periode ergeben sich aus Sätzen der elementaren Zahlentheorie, insbesondere aus dem kleinen Fermatschen Satz und seiner Verallgemeinerung von Euler. Der Autor untersucht in der vorliegenden Arbeit allgemeiner Positionsbrüche zu beliebiger Basis. Die Arbeit ist geeignet, Schüler ab der Mittelstufe an Fragen der elementaren Zahlentheorie heranzuführen.

Bezüglich der Einordnung der hier behandelten Fragen in den Gesamtzusammenhang der Mathematik verweisen wir auf das Buch [1], insbesondere Kapitel 3.

2 Positionsbrüche rationaler Zahlen

Für das folgende genügt es, von rationalen Zahlen α mit $0 < \alpha < 1$ auszugehen. Wir bezeichnen die Menge dieser Zahlen mit $\mathcal{Z}$.

Sei g eine natürliche Zahl mit $g > 1$ und sei M_g die Menge der Zahlen $0, 1, \ldots, g-1$. Eine rationale Zahl α mit $\alpha > 0$ hat eine eindeutige Bruchdarstellung $\alpha = \frac{b}{c}$ mit natürlichen Zahlen b und c, die zueinander teilerfremd sind. b heißt der *Zähler* und c der *Nenner* von α. Für eine beliebige reelle Zahl β bezeichnet $[\beta]$ die größte ganze Zahl a mit $a \leq \beta$.

Eine Zahl $\alpha \in \mathcal{Z}$ hat eine Darstellung als endlicher *Positionsbruch zur Basis* g, wenn es Zahlen $a_1, \ldots, a_s$ in M_g mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{s} a_i g^{-i} \tag{1}$$

gibt.

Satz 2.1

a) *Eine Zahl $\alpha \in \mathcal{Z}$ hat genau dann eine Darstellung* (1) *für ein gewisses s, wenn der Nenner c von α nur Primfaktoren enthält, die Teiler von g sind.*

b) *Sind $a_1, \ldots, a_s$ beliebige Zahlen aus M_g, die nicht sämtlich gleich* 0 *sind, so ist durch* (1) *eine Zahl α aus $\mathcal{Z}$ gegeben.*

c) *Die Darstellung* (1) *ist eindeutig.*

Beweis. a) Sei α eine Zahl mit der Darstellung (1). Dann hat α die Bruchdarstellung $\left(\sum_{i=1}^{s} a_i g^{s-i}\right)/g^s$, d.h. im Nenner von α gehen nur Teiler von g auf. Wenn umgekehrt $\alpha = \frac{b}{c}$ eine Zahl ist, deren Nenner nur Primteiler hat, die durch g teilbar sind, so gibt es eine Potenz g^h mit $c | g^h$. Daher ist α von der Form $\alpha = \frac{d}{g^h}$ mit einer natürlichen Zahl d. Wegen $\alpha < 1$ ist $d < g^h$ und hat eine Darstellung $d = \sum_{i=0}^{h-1} a_i g^i$ mit $a_i \in M_g$. Es folgt

$$\alpha = \frac{d}{g^h} = \sum_{i=0}^{h-1} a_i g^{i-h} = \sum_{i=1}^{h} a_{h-i} g^{-i}.$$

Damit ist a) bewiesen.

b) Wir haben $\alpha < 1$ zu zeigen. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{s} a_i g^{-i} \leq \sum_{i=1}^{s} (g-1) g^{-i} = 1 - g^{-s}.$$

c) $\alpha g = a_1 + \sum_{i=2}^{s} a_i g^{-s+1}$. Daher ist a_1 nach b) der ganze Teil von αg. Die eindeutige Bestimmtheit von $a_2, \ldots, a_s$ zeigt man entsprechend durch Induktion. □

Die durch Satz 2.1 nicht erfassten rationalen Zahlen werden durch Positionsbrüche approximiert:

Satz 2.2 *Sei α eine Zahl aus $\mathcal{Z}$, in deren Nenner mindestens eine Primzahl aufgeht, die nicht g teilt. Dann gibt es eine Zahlenfolge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $a_n \in M_g$, sodass für alle $s \in \mathbb{N}$ die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{s} a_i g^{-i} < \alpha < g^{-s} + \sum_{i=1}^{s} a_i g^{-i} \tag{2}$$

gilt. Die Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ ist durch α eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir beweisen Satz 2.2 durch Induktion über s.

Für $s = 1$ gibt es genau ein $a_1 \in M_g$ mit $a_1 < \alpha g < a_1 + 1$: In der Tat ist nach Voraussetzung $\alpha < 1$. Weiter ist αg nach Satz 2.1 keine ganze Zahl, also ist $a_1 = [\alpha g]$ zu setzen. Mit $\alpha_1 := \alpha g - a_1$ gilt $0 < \alpha_1 < 1$.

Sei jetzt (2) für ein gewisses s bereits bewiesen. Wir setzen $\alpha_s := \alpha g^s - \sum_{i=1}^{s} a_i g^{s-i}$. Dann ist (2) gleichbedeutend mit $0 < \alpha_s < 1$. Wir haben a_{s+1} mit

$$\sum_{i=1}^{s+1} a_i g^{s+1-i} < \alpha g^{s+1} < 1 + \sum_{i=1}^{s+1} a_i g^{s+1-i}$$

zu bestimmen. Das ist gleichbedeutend mit $a_{s+1} < \alpha_s g < 1 + a_{s+1}$. Man kann daher die Überlegung von Fall $s = 1$ wiederholen und hat $a_{s+1} = [\alpha_s g]$ und $\alpha_{s+1} = \alpha_s g - [\alpha_s g]$ zu setzen. □

Beispiel 1. Sei $g = 10$ und $\alpha = \frac{1}{7}$. Dann ist a_1 aus $a_1 < 10\alpha < a_1 + 1$ zu bestimmen, d.h. $a_1 = 1$ und $\alpha_1 = \frac{3}{7}$. Aus $a_2 < 10\alpha_1 < a_2 + 1$ ergibt sich $a_2 = 4$, $\alpha_2 = \frac{2}{7}$. Entsprechend findet man $a_3 = 2$, $\alpha_3 = \frac{6}{7}$, $a_4 = 8$, $\alpha_4 = \frac{4}{7}$, $a_5 = 5$, $\alpha_5 = \frac{5}{7}$, $a_6 = 7$, $\alpha_6 = \frac{1}{7}$. Wegen $\alpha_6 = \alpha$ wiederholt sich der Prozess der Bestimmung der a_i. Man erhält $a_7 = a_1$ und allgemein $a_{i+6} = a_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Man spricht von einem *periodischen Dezimalbruch.*

Beispiel 2. Sei $g = 10$ und $\alpha = \frac{1}{6}$. In diesem Fall wird $a_1 = 1, \alpha_1 = \frac{2}{3}, a_2 = 6, \alpha_2 = \frac{2}{3}$. Es folgt $a_{i+1} = a_i$ für $i \geq 2$.

Satz 2.3 *Sei α eine Zahl aus $\mathcal{Z}$, in deren Nenner mindestens eine Primzahl aufgeht, die nicht g teilt. Dann ist die entsprechend Satz 2.2 zu α und g gehörige Folge $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ periodisch, das heißt, es gibt eine nichtnegative ganze Zahl m und eine natürliche Zahl l, sodass $a_{i+l} = a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > m$ gilt.*

Beweis. Sei c der Nenner von α. Die Zahlen α_n aus dem Beweis von Satz 2.2 sind rationale Zahlen in $\mathcal{Z}$, deren Nenner Teiler von c sind. Mit $\alpha_n = \frac{b_n}{c}$ folgt $0 < b_n < c$. Es gibt also ein n und ein l mit $b_{n+l} = b_n$. Daraus folgt $b_{i+l} = b_i$ für alle $i \geq n$. □

Die Zahlen m und l in Satz 2.3 sind nicht eindeutig bestimmt. Seien m_0 und l_0 die kleinstmöglichen. Dann heißt die Folge $a_1, \ldots, a_{m_0}$ die *Vorperiode* von α und $a_{m_0+1}, \ldots, a_{m_0+l_0}$ heißt die *Periode* von α. Weiter heißt m_0 die *Vorperiodenlänge* und l_0 die *Periodenlänge* von α. Nach dem Beweis von Satz 2.3 gilt $m_0 \leq c-2$ und $l_0 \leq c-1$. Im Beispiel 1 ist $m_0 = 0$ und $l_0 = 6$, im Beispiel 2 ist $m_0 = 1$ und $l_0 = 1$. Im Falle $m_0 = 0$ heißt α und die Folge $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ *reinperiodisch*.

Wir haben jeder Zahl $\alpha \in \mathcal{Z}$, in deren Nenner eine Primzahl aufgeht, die g nicht teilt, eine unendliche Folge $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ mit $a_i \in M_g$ zugeordnet, sodass

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i g^{-i}$$

gilt, d.h. die Folge $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \mid n \in \mathbb{N} \right)$ konvergiert gegen α. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i g^{-i}$ heißt *Positionsdarstellung* von α zur Basis g.

Ist umgekehrt eine periodische Folge $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ mit $a_i \in M_g$ gegeben, so konvergiert die Folge $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \mid n \in \mathbb{N} \right)$ gegen eine rationale Zahl α mit $0 \leq \alpha \leq 1$. Genauer gilt der folgende Satz:

Satz 2.4 *Sei $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ eine reinperiodische Folge mit $a_i \in M_g$ und sei die Periodenlänge der Folge gleich s. Dann konvergiert die Folge $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g^{-i} \mid n \in \mathbb{N} \right)$ gegen die Zahl*

$$\frac{g^s}{g^s - 1} \cdot \sum_{i=1}^{s} a_i g^{-i}.$$

Beweis. Mit $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i g^{-i}$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha g^s &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i g^{s-i} = \sum_{i=1}^{s} a_i g^{s-i} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=s+1}^{n} a_i g^{s-i} \\ &= \sum_{i=1}^{s} a_i g^{s-i} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-s} a_i g^{-i} = \sum_{i=1}^{s} a_i g^{s-i} + \alpha. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Eine Zahl $\alpha \in \mathcal{Z}$, in deren Nenner nur Primzahlen aufgehen, die g teilen, hat nach Satz 2.1 eine Darstellung $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i g^{-i}$. Für eine einheitliche Schreibweise ordnen wir α die unendliche Folge $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ mit $a_i = 0$ für $i > s$ zu. Wir sagen, dass α die Periodenlänge 0 hat.

Damit haben wir jeder Zahl α aus $\mathcal{Z}$ eine periodische Folge $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ mit $a_i \in M_g$ zugeordnet. In Positionsschreibweise setzt man

$$\alpha =: 0, a_1 \ldots a_m \, \overline{a_{m+1} \ldots a_{m+l}},$$

wobei $a_{m+1}, \ldots, a_{m+l}$ die Periode von α ist. Bei der Zuordnung von $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ zu α kommen nicht alle periodischen Folgen $(b_i \mid i \in \mathbb{N})$ mit $b_i \in M_g$ vor. Wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b_m < g-1$ und $b_i = g-1$ für alle $i > m$ gibt, gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i g^{-i} = \sum_{i=1}^{m} b_i g^{-i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} (g-1) g^{-i} = \sum_{i=1}^{m} b_i g^{-i} + g^{-m}.$$

Der Zahl $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} b_i g^{-i}$ ist also die Folge $b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m + 1$ zugeordnet. Entsprechend ist $\sum_{i=1}^{\infty} (g-1) g^{-i} = 1$. Man überzeugt sich leicht, dass die eben beschriebenen Folgen $(b_i \mid i \in \mathbb{N})$ und die triviale Folge $(0 \mid i \in \mathbb{N})$ die einzigen sind, die nicht einer Zahl $\alpha \in \mathcal{Z}$ zugeordnet sind.

Es ergeben sich die folgenden Fragen über die Struktur des Positionsbruches einer Zahl $\alpha \in \mathcal{Z}$:

1. Wann ist der Positionsbruch reinperiodisch?
2. Was kann man über die Vorperioden- und Periodenlänge von α in Abhängigkeit von dem Nenner von α sagen?
3. Seien α und β zwei Zahlen aus $\mathcal{Z}$, deren Perioden sich nur um eine zyklische Vertauschung unterscheiden. Was kann man in diesem Fall über die arithmetische Struktur von α und β sagen?

Beispiel. Im Dezimalsystem gilt

$$0,\overline{09} = \frac{1}{11}, \quad 0,\overline{90} = \frac{10}{11}.$$

Wir beantworten diese Fragen im vierten Abschnitt, nachdem wir im dritten Abschnitt die zahlentheoretischen Grundlagen gelegt haben.

3 Hilfsmittel aus der elementaren Zahlentheorie

In diesem Abschnitt stellen wir einige Sätze der elementaren Zahlentheorie zusammen. Bei deren Beweisen in den Lehrbüchern wird die Gruppentheorie benutzt. Da diese in der Schule nicht gelehrt wird, geben wir hier direkte Beweise ohne Benutzung von Gruppentheorie.

Satz 3.1 (Kleiner Fermatscher Satz) *Sei p eine Primzahl und h eine beliebige natürliche Zahl. Dann ist p ein Teiler von $h^p - h$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über h. Für $h = 1$ ist die Behauptung klar. Sei sie schon für ein h bewiesen. Dann gilt nach dem binomischen Lehrsatz $(h+1)^p - (h^p + 1) = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} h^i$.

Die Binomialkoeffizienten $\binom{p}{i} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}$ sind für $1 \le i \le p-1$ durch p teilbar. Daraus folgt, dass p ein Teiler von $(h+1)^p - (h^p+1)$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist p ein Teiler von $h^p - h$. Daher ist p auch ein Teiler von

$$(h+1)^p - (h^p+1) + (h^p - h) = (h+1)^p - (h+1). \qquad \square$$

Die Verallgemeinerung von Satz 3.1 auf beliebige natürliche Zahlen n stammt von Euler. Dazu führen wir die *Eulersche Funktion* $\varphi(n)$ ein: Sei $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{v_i}$ die Primzahlzerlegung von n. Dann setzen wir

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{s} (p_i - 1) p_i^{v_i - 1}.$$

Satz 3.2 *Seien n und h natürliche teilerfremde Zahlen. Dann ist n ein Teiler von $h^{\varphi(n)} - 1$.*

Beweis. Sei $n = p$ zunächst eine Primzahl. Dann gilt $p|(h^p - h)$ nach Satz 3.1. Nach Voraussetzung gilt $p \nmid h$. Daher ist p ein Teiler von $h^{p-1} - 1$.

Sei jetzt $n = p^v$ eine Primzahlpotenz. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über v. Für $v = 1$ haben wir sie bereits bewiesen. Sei für ein gewisses v bereits $p^v|(h^{(p-1)p^{v-1}} - 1)$ bewiesen. Wir setzen $w := h^{(p-1)p^{v-1}} - 1$. Dann gilt

$$h^{(p-1)p^v} - 1 = (w+1)^p - 1.$$

Analog zum Beweis von Satz 3.1 folgt daraus $p^{v+1}|(w+1)^p - 1$.

Sei jetzt $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{v_i}$ beliebig. Wir setzen $n_i := \prod_{j\neq i} p_j^{v_j}$. Dann gilt $\varphi(n) = \varphi(n_i)\varphi(p_i^{v_i})$ und $p^{v_i}|((h^{\varphi(n_i)})^{(p_i-1)p_i^{v_i-1}} - 1)$ für $i = 1, \ldots, s$ und daher $n|(h^{\varphi(n)} - 1)$. $\square$

Für eine gegebene zu n teilerfremde Zahl h ist $\varphi(n)$ im allgemeinen nicht die kleinste Zahl s mit $n|(h^s - 1)$. Diese Zahl s heißt die *Ordnung von h modulo n*.

Satz 3.3 *Sei s die Ordnung von h modulo n. Dann gilt für eine natürliche Zahl m die Beziehung $n|(h^m - 1)$ genau dann, wenn m ein Vielfaches von s ist.*

Beweis. Wir setzen $w := h^s - 1$.

a) Sei $m = sa$ ein Vielfaches von s. Dann gilt

$$h^m - 1 = (w+1)^a - 1 = \sum_{i=1}^{a} \binom{a}{i} w^i$$

und daher $n|(h^m - 1)$.

b) Sei m eine natürliche Zahl mit $n|(h^m-1)$ und sei $m = as+b$ die Division von m durch s mit Rest b, wobei $0 \le b < s$ ist. Dann gilt

$$h^m - 1 = h^{as} \cdot h^b - 1 = (w+1)^a h^b - 1 = \sum_{i=1}^{a} \binom{a}{i} w^i h^b + h^b - 1.$$

Mit $h^m - 1$ und w ist auch $h^b - 1$ durch n teilbar. Da s nach Definition die kleinste natürliche Zahl mit $n|(h^s-1)$ ist, folgt $b = 0$, d.h. m ist durch s teilbar. □

Insbesondere gilt $s|\varphi(n)$. Die Zahl $\varphi(n)$ hat die folgende inhaltliche Bedeutung: Sei $R(n)$ die Menge der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen a mit $1 \le a < n$. Dann ist die Anzahl $|R(n)|$ der Elemente von $R(n)$ gleich $\varphi(n)$. Wir beweisen das in Satz 3.5. Dazu benötigen wir den folgenden Satz, der als *Chinesischer Restklassensatz* bezeichnet wird.

Satz 3.4 *Seien n_1 und n_2 teilerfremde natürliche Zahlen und sei $f(x_1, x_2)$ die Abbildung von $R(n_1) \times R(n_2)$ in $\mathbb{N}$, die dem Paar (x_1, x_2) den kleinsten positiven Rest von $x_1n_2 + x_2n_1$ bei der Division durch n_1n_2 zuordnet. Dann ist f eine eineindeutige Abbildung von $R(n_1) \times R(n_2)$ auf $R(n_1n_2)$.*

Beweis. Seien (x_1, x_2) und (y_1, y_2) Paare in $R(n_1) \times R(n_2)$ mit $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$. Dann gilt $n_1n_2|(x_1n_2 + x_2n_1 - y_1n_2 - y_2n_1)$. Es folgt $n_1|(x_1 - y_1)$ und $n_2|(x_2 - y_2)$ und daher $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Die Abbildung f ist also eineindeutig. Nach der Definition von f ist klar, dass $f(x_1, x_2)$ teilerfremd zu n_1 und n_2 ist. Daher liegt $f(x_1, x_2)$ in $R(n_1n_2)$.

Es bleibt zu zeigen, dass f auf $R(n_1n_2)$ abbildet: Sei $m \in R(n_1n_2)$. Da n_1 und n_2 teilerfremd sind, lässt sich jede ganze Zahl als ganzzahlige Linearkombination von n_1 und n_2 darstellen. Es gibt also ganze Zahlen x_1' und x_2' mit $m = x_1'n_2 + x_2'n_1$. Da m teilerfremd zu n_1n_2 ist, ist x_1' teilerfremd zu n_1 und x_2' teilerfremd zu n_2. Sei x_1 bzw. x_2 der kleinste positive Rest von x_1' bzw. x_2'. Dann ist $f(x_1, x_2) = m$. □

Satz 3.5 $|R(n)| = \varphi(n)$.

Beweis. Sei $n = p^v$ zunächst eine Primzahlpotenz. Dann haben die Zahlen x mit $1 \le x \le p^v$, die mit p^v einen gemeinsamen Teiler haben, die Form ph, $h = 1, \ldots, p^{v-1}$. Daher gilt $|R(p^v)| = p^v - p^{v-1} = (p-1)p^{v-1} = \varphi(p^v)$. Sei jetzt $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{v_i}$ beliebig. Nach Satz 3.3 gilt

$$|R(n)| = \prod_{i=1}^{s} |R(p_i^{v_i})| = \prod_{i=1}^{s} \varphi(p_i^{v_i}) = \varphi(n).$$ □

4 Über die Perioden von Positionsbrüchen rationaler Zahlen

Wir kommen jetzt zu den Gesetzmäßigkeiten über die Perioden rationaler Zahlen. Dabei bezeichnet α immer eine rationale Zahl mit $0 < \alpha < 1$ und der reduzierten Bruchdarstellung $\frac{b}{c}$.

Satz 4.1 *Die Positionsbruchdarstellung von α zur Basis g ist genau dann reinperiodisch, wenn c teilerfremd zu g ist.*

Beweis. Wenn die Positionsbruchdarstellung von α reinperiodisch mit der Periodenlänge s ist, gilt nach Satz 2.4: $b(g^s-1) = c\Big(\sum\limits_{i=1}^{s} a_i g^{s-i}\Big)$. Daher ist c ein Teiler von g^s-1, also teilerfremd zu g.

Ist andererseits c teilerfremd zu g, so gibt es nach Satz 3.3 eine kleinste natürliche Zahl s mit $c|(g^s-1)$. Daraus folgt, dass $\frac{b}{c}(g^s-1)$ eine natürliche Zahl ist. Sei

$$\frac{b}{c}(g^s-1) = \sum_{i=1}^{s} a_i g^{s-i}.$$

Dann ist $\frac{b}{c} = \frac{1}{(1-g^{-s})} \sum\limits_{i=1}^{s} a_i g^{-i} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} g^{-js} \sum\limits_{i=1}^{s} a_i g^{-i}$ und daher ist $\alpha = 0, \overline{a_1 \ldots a_s}$ reinperiodisch mit der Periode s. □

Insbesondere haben wir noch den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.2 *Sei c teilerfremd zu g. Weiter sei s die kleinste natürliche Zahl mit $c|(g^s-1)$. Dann ist die Positionsbruchdarstellung von α reinperiodisch mit Periodenlänge s und die Periode $a_1, \ldots, a_s$ berechnet sich aus*

$$\frac{b}{c}(g^s-1) = \sum_{i=1}^{s} a_i g^{s-1}.$$ □

Satz 4.3 *Sei $c = c' \cdot a$ eine natürliche Zahl mit $c' > 1$, wobei c' teilerfremd zu g ist und in a nur Primteiler von g aufgehen. Weiter sei t die kleinste nichtnegative ganze Zahl mit $a|g^t$ und s die kleinste natürliche Zahl mit $c'|(g^s-1)$. Dann hat die Positionsbruchdarstellung von $\alpha = \frac{b}{c}$ zur Basis g die Vorperiodenlänge t und die Periodenlänge s.*

Beweis. Wir setzen

$$\frac{b'}{c'} := \frac{b}{c}\, g^t - \Big[\frac{b}{c}\, g^t\Big].$$

Dann ist b' eine natürliche Zahl mit $b' < c'$ und $\mathrm{ggT}(b', c') = 1$. Der Positionsbruch $\frac{b'}{c'}$ ist nach Satz 4.2 reinperiodisch. Es folgt, dass $\frac{b}{c} = \Big[\frac{b}{c} g^t\Big] g^{-t} + \frac{b'}{c'}\, g^{-t}$ die Vorperiodenlänge t und die Periodenlänge s hat. □

Satz 4.3 zeigt, dass die Vorperiodenlänge und die Periodenlänge nur vom Nenner des Bruches $\frac{b}{c} \in \mathcal{Z}$ abhängen. Im weiteren untersuchen wir die Perioden von reinperiodischen Brüchen $\frac{b}{c}$ bei festem c in Abhängigkeit von b.

Da dann b und g teilerfremd sind, können wir in der Menge $R(c)$ die folgende Äquivalenzrelation einführen: Sei s die Ordnung von g modulo c. Wir nennen $b_1, b_2 \in R(c)$ äquivalent ($b_1 \sim b_2$), wenn es ein i mit $0 \le i \le s-1$ gibt, sodass $c|(b_2 - b_1 g^i)$ gilt. Wie man leicht sieht, ist die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation in $R(c)$, d.h. es gelten für $b_1, b_2, b_3 \in R(c)$ die Beziehungen: A) $b_1 \sim b_1$, B) aus $b_1 \sim b_2$ folgt $b_2 \sim b_1$, C)

aus $b_1 \sim b_2$ und $b_2 \sim b_3$ folgt $b_1 \sim b_3$. Demnach ist insbesondere $R(c)$ die disjunkte Vereinigung der Teilmengen A, die jeweils aus zueinander äquivalenten Zahlen von $R(c)$ gebildet sind. Es gilt $|A| = s$.

Satz 4.4 *Sei $\alpha = \frac{b}{c} \in \mathcal{Z}$ ein reduzierter Bruch mit* $\mathrm{ggT}(b, g) = 1$. *Dann erhält man die Perioden des Bruches $\frac{b'}{c}$ für $b' \sim b$ durch zyklische Vertauschung der Periode von $\frac{b}{c}$.*

Beweis. Bei dem im Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren zur Berechnung der Periode von $\frac{b}{c}$ treten als Zähler der Zahlen $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ gerade die zu b äquivalenten Zahlen $b = b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}$ auf, die induktiv bestimmt sind: b_{i+1} ist der kleinste positive Rest von gb_i bei der Division durch c. Hieraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 1. Im Dezimalsystem gilt

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}, \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}, \quad \frac{3}{7} = 0,\overline{428571},$$

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}, \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}, \quad \frac{6}{7} = 0,\overline{857142}.$$

Beispiel 2. Im Dezimalsystem gilt

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{09}, \quad \frac{10}{11} = 0,\overline{90}, \quad \frac{2}{11} = 0,\overline{18}, \quad \frac{9}{11} = 0,\overline{81},$$

$$\frac{3}{11} = 0,\overline{27}, \quad \frac{8}{11} = 0,\overline{72}, \quad \frac{4}{11} = 0,\overline{36}, \quad \frac{7}{11} = 0,\overline{63},$$

$$\frac{5}{11} = 0,\overline{45}, \quad \frac{6}{11} = 0,\overline{54}.$$

Literatur

[1] Koch, H.: *Einführung in die Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin 2002, 2. korrigierte und erweiterte Auflage 2004.

Helmut Koch
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
D-10099 Berlin, Deutschland
e-mail: koch@mathematik.hu-berlin.de