

NOTION, NATURE ET ENSEIGNEMENT DES RÈGLES DE LA MULTIPLICATION

Autor(en): **Baron, Raoul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1238>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DES RÈGLES DE LA MULTIPLICATION

La Table de Pythagore nous a tous initiés de bonne heure, de trop bonne heure peut-être, à répéter comme des perroquets : 4 fois 3 douze, 7 fois 9 soixante-trois, 8 fois 5 quarante, etc., etc.

Au point de vue pratique, un peu *phénicien* (?) de la plupart des gens, cela est parfait et peut passer pour une « notion ». Mais il faut reconnaître que l'empirisme de ce procédé ne nous mène pas loin, même dans l'APPLICATION de la science, attendu que l'on ne peut guère appliquer une Loi qu'en la dépouillant des circonstances trop particulières où elle se présente.

Les auteurs ont donc eu raison de placer tout au début de l'arithmétique la définition suivante : « multiplier un nombre par un autre, c'est chercher un troisième nombre qui se compose avec l'un des deux premiers, comme le second se compose avec l'unité. — En d'autres termes : Deux nombres étant donnés, j'appelle l'un *multiplicande* et l'autre *multiplicateur* ; et je me propose de trouver un nombre appelé *produit* qui soit au multiplicande comme le multiplicateur est à l'UNITÉ. »

§ 1. Mais qu'est-ce que ceci signifie : « Être à... comme... est à... ? » — Si l'on dit à l'élève que 12 est à 3 comme 4 est à 1, en ce sens que 12 est le *quadruple* de 3, comme 4 est le quadruple de 1, l'élève pourra croire que l'on confond ici *explication* avec *complication* ; et il répondra, s'il ose, que « le double, le triple, le quadruple, le quintuple, etc., d'un nombre sont des idées suffisamment claires pour se passer de la comparaison qu'on a essayé de faire ».

Cela est très exact au fond. Car la série des termes ci-dessus, *double, triple, quadruple...*, nous conduit facilement à l'expression générique de *n-uple* ou de MULTIPLE ; d'où la définition suivante :

« multiplier un nombre par un autre, c'est chercher, dans la série des « multiples » de ce premier nombre, celui qui a pour *numéro* d'ordre le chiffre du second nombre. »

Il en résulte dès lors que le multiplicande n'est point un nombre absolument abstrait, à la façon du multiplicateur. D'autre part, le *produit* est congénère du multiplicande et semi-concret comme lui. Nous allons le prouver avec complaisance, à cause de la gravité réelle de ce problème pédagogique.

I. — On tarde trop, je crois, à faire connaître aux élèves le « coefficient ». Ce serait pourtant là un bon moyen pour leur définir sérieusement le nombre *abstrait*.

Il n'y a au monde que des OBJETS (qui se comptent) et des *gestes réitérés* (pour les compter un à un). Dire aux enfants ou aux jeunes gens, peu importe, que « six » est un nombre abstrait, parce que l'on trouve abstraitement ce nombre dans six chapeaux, six bouteilles, six œufs, etc., c'est confondre autour avec alentour ! Si vous voulez matérialiser vos leçons, ayez donc un tas de bouteilles, de chapeaux ou de ce que vous voudrez.. puis allez au tas et apportez *successivement* sur la table 1, 2, 3, 4 bouteilles, par exemple. Vous n'aurez pas de peine à faire comprendre à l'auditoire que vous vous êtes dérangé 1, 2, 3, 4 *fois* pour rassembler, soit des bouteilles, soit des chapeaux, soit n'importe quoi.

Le voilà pris sur le vif le fameux nombre abstrait : c'est le « combien de fois ? »

Supposons maintenant que vous rapportiez trois bouteilles à la fois et que vous fassiez ce manège 8 *fois* ; cela fait 24 bouteilles, n'est-ce pas ? mais il faut enfoncer le clou. Rempportez donc quatre bouteilles à la fois et débarrassez votre table en six *coups*. Recommencez encore en prenant deux bouteilles à la fois et en faisant 12 *voyages* ; puis, pour finir, enlevez les bouteilles, en 4 *tours* de main... — Voilà une bonne leçon !

§ 2. Le MULTIPLICANDE dérive d'un groupement préalable des *unités quelconques* ; quand l'emballage est terminé, on emporte les ballots, un à un, et on compte les départs. Le MULTIPLICATEUR sert à enregistrer la cote. Ce n'est pas une « quantité », c'est

plutôt une « quotité », — dans le sens étymologique du terme.

Ici se présente une réponse à la question soulevée par les métaphysiciens : « Le nombre *vingt*, par exemple, est-il une collection synthétique de 20 unités ou le *vingtième* nombre de la série numérique ? »

Hé bien ??... Cela dépend ? — Grammaticalement parlant les nombres « cardinaux » sont des adjectifs déterminatifs qui n'ont aucun sens complet par eux-mêmes. En ajoutant à la suite le mot « chose » ou *machin* (?) on se tire d'affaire, mais on ne fait point une abstraction correcte ni enviable.

Si l'on veut être intelligible, il faut transformer le mot « vingt » en « vingtaine » et compter les vingtaines comme on compte des paquets d'allumettes ou des sacs de pommes de terre, etc., etc.

Par contre, et toujours grammaticalement, s'il s'agit d'un numéro d'ordre, on écrira : Louis XIV = Louis le quatorzième ; et on fera observer que 14 est un nombre *ordinal* populairement abrégé.

Donc : le nombre 80 (quatre-vingts), tel qu'on a pris l'habitude de l'articuler, est un *index* plutôt algébrique qu'arithmétique, en ce sens que la multiplication de 20 par 4 y est énoncée et non pas effectuée. Pour le penseur, quatre-vingts suggère l'idée de la quatrième vingtaine transférée et consignée par la caisse des Dépôts et Consignations. Le maître d'école devrait faire analyser cette *locution* de la manière suivante : « Quatre-vingts, c'est-à-dire 4 fois vingt, c'est-à-dire la quatrième expédition des marchandises qu'on a coutume de ficeler par bottillons de 20 pièces. » — En résumé : Une *vingtaine* est comme une *douzaine*, un *quarteron*, une *grosse* ; une *tonne*, etc... Ça se compte à la queue leu leu, tout comme des chapeaux, des bouteilles ; et le COMPTE que ça représente est un nombre abstrait proprement dit, en deux temps et trois mouvements. — Le mot « fois » se traduit par « temps » en beaucoup de langues.

§ 3. Au delà de l'enseignement primaire, il serait bon de noter différenciellement les nombres abstraits, les vrais coefficients, par $N \times 1^0$, afin de les distinguer formellement de $N \times 1^1 =$ un nombre qui contient N unités. — Bref : $N \text{ fois} = N \cdot 1^0$; $un = 1^1$; $N \text{ fois un} = N \cdot 1^0 \cdot 1^1 = N \cdot 1^1$.

Que l'on ne crie pas à la scolastique... ! Car je vais immédiatement prouver que $(5 \times 7 = 35)$ est une proposition vague, indigne de la réputation des mathématiciens. — Voici cette preuve :

α). Si c'est la multiplication de deux nombres parfaitement abstraits l'un par l'autre, il faut opérer ainsi :

$$\begin{array}{r}
 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 \\
 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 \\
 \hline
 1^0 + 1^0 + 1^0 + \\
 1^0 + 1^0 + \\
 1^0 + \\
 \\
 + 1^0 \\
 \hline
 \text{Total} = 35 \text{ fois } 1^0 \text{ ou } 35 \text{ pur.}
 \end{array}$$

En langage ordinaire on devra dire : 5 fois \times 7 fois égale 35 fois.

β). Si je considère la multiplication de 7 unités par 5, j'aurai 35 unités ou 5 fois les sept unités, une quintuple *heptade* d'objets *indéfinis*, mais d'OBJETS. Ou bien : $(5 \times 1^0) \times (7 \times 1^1) = (35 \times 1^1)$.

En prenant 7 fois une *demi-décade*, j'aurais le même résultat. Nous y reviendrons.

γ). Si je pose la multiplication de 5 unités par 7 unités, j'aurai 35 *unités carrées* : $(5 \times 1^1) \times (7 \times 1^1) = (35 \times 1^2)$ et 35 est un nombre RECTANGLE.

δ). Comme corollaire : je dis que 25 est le *carré* de 5, pourvu que *cinq* ne soit pas (5×1^0) .

§ 4. Le genre didactique est trop abandonné pour que j'espère soutenir ici que le nombre 64, par exemple, diffère de lui-même, selon que l'on envisage 64 fois, 64 unités simples, 64 unités carrées ou 64 unités cubiques, ou même 64 unités de la forme 1^6 . On a la routine d'écrire : $64 \times 1^0 = 64 \times 1^1 = 64 \times 1^2$, etc. On enseigne que $4 \times 4 \times 4 = 8 \times 8$, sans remarquer que le signe $=$ serait absurde en géométrie pour établir la lointaine analogie entre un hexaèdre de 4 mètres de côté et un carré de 8 mètres de côté.

L'algèbre a fini, pour beaucoup de maîtres, par la démonstration de $i^0 = i^1 = i^8 = i^{12} \dots$ etc., ... etc.

On ne remontera pas le courant !

N'empêche que toutes ces confusions entre l'*homonymie* et l'*égalité* ne soient antirationnelles... Mais revenons à notre sujet précis.

Y a-t-il trois termes ou quatre termes en jeu dans la multiplication ?

— Hé bien ??... et encore, cela dépend ! Voici pourquoi : Si je considère la multiplication comme la répétition ou l'addition à elle-même d'une certaine grandeur, un certain nombre de fois, il n'est guère indispensable de reconnaître quatre termes : $24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 120$ représente le résultat d'une sommation spéciale. Au lieu d'ajouter l'un à l'autre *cinq* nombres inégaux, j'ai ajouté cinq nombre égaux. C'est tout.

Mais si je considère l'égalité de deux rapports par quotient, tels que $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, ma conception est forcément quaternitaire ou, si l'on veut, doublement binaire. Le multiplicateur et l'unité formant un premier couple, le produit et le multiplicande forment un second couple analogue au premier.

Remarquons tout de suite que l'homogénéité n'est exigible que dans les deux termes d'un même couple. Bref : « Six pommes de terre est à deux pommes de terre, comme quinze violons est à cinq violons. »

Toute facétie à part, j'ai le droit de biffer au numérateur et au dénominateur un terme commun, et de diviser les deux termes par « pommes de terre », dans un cas, et par « violons » dans l'autre cas ; de façon à laisser $\frac{6}{2} = \frac{15}{5}$ ou mieux encore $\frac{6 \times 1^0}{2 \times 1^0} = \frac{15 \times 1^0}{5 \times 1^0}$, afin de souligner l'idée systématique.

II. — La commutativité semble inséparable de l'essence de la multiplication ; surtout dans la conception quaternitaire $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, attendu qu'on peut déplacer les moyens ou les extrêmes, *ad libitum*.

Quelle est donc, dès lors, l'origine des noms de *multiplicateur* et de *multiplicande* ?

Avouons-le, à notre honte, il y a 99 p. 100 des écoliers qui demeurent convaincus que, dans la multiplication, on *doit* placer en haut de la page le grand nombre et au-dessous le plus petit. Demandez à qui vous voudrez de multiplier 37 par 819, et vous verrez, sauf exception infiniment rare, l'enfant, le jeune homme ou le monsieur écrire ainsi :

$$\begin{array}{r} 819 \\ 37 \\ \hline 5733 \\ 2457 \\ \hline 30303 \end{array}$$

Allez au tableau et faites vous-même l'opération de la manière suivante : *Vous verrez...!*

$$\begin{array}{r} 37 \\ 819 \\ \hline 333 \\ 37 \\ \hline 296 \\ \hline 30303 \end{array}$$

Mon intention n'est pas de changer les habitudes de faire... Ces habitudes ont été fixées par la loi de commodité, mais l'intelligence est assez souple pour ne pas se figer d'emblée comme une sauce vulgaire ! En d'autres termes : Je voudrais que l'on fit savoir aux étudiants que le nombre placé en haut est le plus grand, mais qu'il n'est pas toujours *ipso facto* le MULTIPLICANDE ; de sorte que l'on ramène la multiplication à une allure uniforme en invoquant le principe de la commutativité. Cela n'est pas une subtilité, tant s'en faut.

§ 5. La notion, la nature et l'origine du multiplicande impliquent une sorte d'hypothèse mystique, sur les rôles des nombres ; hypothèse en vertu de laquelle il y aurait un dualisme arithmétique calqué sur l'antithèse du mâle et de la femelle, de l'actif et du passif. Prenons un fait facile à analyser, c'est-à-dire un nombre d'objets concrets, comme 60 œufs, par exemple.

Je puis partager ces 60 œufs en tas égaux, de plusieurs manières différentes et symétriques *deux à deux*.

6 tas de 10 œufs ;	10 tas de 6 œufs ;
5 » » 12 »	12 » » 5 »
4 » » 15 »	15 » » 4 »
3 » » 20 »	20 » » 3 »
2 » » 30 »	30 » » 2 »

Or, dans chaque exemple, le tas d'œufs envisagé devient la « matière » de l'opération au même titre que l'œuf individuel. L'« esprit » de l'opération s'oppose donc à cette *matière*, comme l'actif au passif, etc...

Je ne vois pas, quant à moi, de meilleure idée à se faire concernant le *multiplicande* et le *multiplicateur*.

La commutativité est donc un phénomène purement expérimental au début et ultérieurement généralisé. Mais 5 tas de 12 œufs = 4 tas de 15 œufs n'est pas une égalité, ni une équation; c'est une « équipollence » empiriquement découverte !

§ 6. Il n'est pas mauvais, non plus, de prendre en considération un fait géométrique, savoir : que le rectangle ayant pour base 12 mètres et pour hauteur 5 mètres, peut tourner d'un angle droit autour d'un de ses sommets et prendre l'aspect d'une *autre figure* ayant 5 mètres de base et 12 mètres de haut. On postule ensuite la permanence de l'aire, en dépit de la rotation et l'on écrit : $12 \times 5 = 5 \times 12$. — Mais cela aussi est une petite découverte expérimentale très féconde.

Remarquez bien, en effet, que, dans l'aire d'un rectangle envisagée comme produit, il n'y a pas lieu d'opposer les facteurs : *Base* et *Hauteur*. Cette fois, il y a commutativité forcée, attendu que la base est *ad libitum* multiplicande ou multiplicateur. — Mieux que cela : « Il y a deux multiplicandes mutuellement et *bisexuellement* (!) multiplicateurs... » Aussi la formule de ce genre de multiplication mérite-t-elle d'être retenue, surtout si l'on veut poursuivre notre étude sur le problème que nous nous sommes posé dès le début, savoir : « Quelles sont les règles les plus générales de la multiplication ? »

Tout le monde doit avoir retenu dans sa mémoire, comme un

événement solennel, l'étrange émotion qu'il a ressentie en apprenant que le *produit* de deux lignes droites (segments) pouvait s'obtenir au moyen d'une « quatrième proportionnelle », sans qu'il fût question de *rectangle* construit, ni d'aire, ni de surface évaluée.

C'est ici que l'on saisit vraiment l'origine étymologique des proportions $A : B :: a : b$, qualifiées « géométriques » par les vieux savants.

§ 7. Quand on lit les œuvres de R. Descartes, on se figure tout d'abord un parti pris de réduire systématiquement le *concret* à l'*abstrait*, sans aucune chance de réciproque. Mais c'est une erreur.

Au bout d'un certain temps, on découvre que l'immortel penseur est le fondateur de l'APPLICATION :

- 1° ou 2° de l'Algèbre à la Géométrie ;
- 2° ou 1° de la Géométrie à l'Algèbre ;
- 3° (plus sûrement) de la *fécondation mutuelle* de ces deux sciences mathématiques, l'une par l'autre.

La technique appropriée à la détermination d'une quatrième proportionnelle consiste essentiellement dans le tracé de plusieurs triangles *semblables*, de façon à lier intimement l'une à l'autre la *grandeur* et la *direction* !

Bref : l'égalité de deux rapports par quotient, dans les segments rectilignes, nous conduit « malgré nous » aux BIRADIALES, et nous révèle la profonde intuition des écrivains qui appelèrent *géométrique* la proportion $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$.

Reprenons maintenant, par curiosité, la définition de la multiplication largement conçue.

Il nous faut dire : « Problème qui consiste à déterminer une inconnue nommée *PRODUIT*, en fonction de *trois* grandeurs connues, dont l'une est prise pour *ÉTALON*, soit par rapport à la seconde, soit par rapport à la troisième, soit par rapport à chacune. »

Ce n'est pas tout : il faut ajouter, en effet, « que le produit se compose et *se comporte* par rapport au multiplicande, tout comme le multiplicateur se compose et *se comporte* par rapport à l'étalon ».

§ 8. Mais, dira-t-on, qu'est-ce que cette façon de *se comporter par rapport à...* ?

Réponse : « C'est tout le calcul des grandeurs dirigées, soit dans le plan, soit dans l'espace. »

Voilà donc les plus hautes difficultés de la mathématique évoquées et impliquées dans cette étude.

III. — Trois vecteurs *coplanaires* étant donnés, avec indication expresse de celui qui est pris pour unité, on les amène facilement à concourir, c'est-à-dire à rayonner d'un même point originel ; et il est facile aussi de construire un quatrième vecteur se comportant par rapport à l'un *quelconque* des deux premiers, comme celui-ci se compose et se comporte par rapport au vecteur unitaire. — Il est inutile d'insister là-dessus.

§ 9. Pourquoi donc cette simplicité serait-elle détruite en passant des vecteurs coplanaires aux vecteurs non-coplanaires ?

— Parce que, dirais-je modestement, le prestige exercé par l'illustre Hamilton a produit les mêmes effets que le prestige exercé par l'illustre Cuvier : on n'a pas osé se permettre de trouver *autre chose!!!*

Les grands hommes ont malheureusement le défaut des grands arbres : il est difficile de faire pousser quelque chose à leur ombre, sauf le lierre qui monte le long de leur tige puissante et qui redescend bientôt pour remonter encore... et ainsi de suite.

La nation qui a produit Hamilton a raison d'être fière... Mais celle qui a produit Descartes aurait tort de ne pas l'être. J'avoue, en ce qui me concerne, que le calcul sublime des quaternions étant fait et bien fait, il n'y a pas à le refaire. Mais je soutiens que l'exceptionnalité de son algèbre n'est elle-même qu'une vue subjective des faits géométriques de l'espace à trois dimensions, une conquête par mouvement tournant de la Terre Promise, un beau stratagème de guerre enfin. — Voici la justification minutieuse de mes paroles hardies.

§ 10. Pédagogiquement examinée, la question de savoir jusqu'où $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ peut s'étendre, se traiterai ainsi :

« On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ses deux termes par le même nombre, quel que soit ce nombre. »

Voilà pourquoi $\frac{A}{B}$, comme $\frac{a}{b}$, peut être réduit à une fraction assez heureusement choisie pour que le dénominateur soit 1^0 (une puissance zéro).

Mais la routine est omnipotente : on considère la division comme le couronnement des quatre règles de l'Arithmétique élémentaire ; de sorte que le rapport par quotient de $A : B$ n'aurait même pas de sens pour éclairer la définition du *produit* vis-à-vis du *multiplicande* ?

Dans un tel état de misère philosophique, comment voulez-vous arriver à comprendre et surtout à faire comprendre la multiplication de deux vecteurs l'un par l'autre ? on renonce à être professeur... on se fait prestidigitateur et l'on escamote la carte gênante.

Il faut, comme on dit, s'élever du connu à l'inconnu et insister fortement sur les choses très connues sans craindre d'y perdre son temps. Car les hésitations que l'on éprouve plus tard, en présence d'un problème nouveau, tiennent surtout à ce qu'on sait mal le problème antérieur qui sert à préparer la solution.

Si tous les vecteurs étaient parallèles et toujours dirigés de gauche à droite, par exemple, la recherche du vecteur-produit, par les constructions géométriques, eût fait l'effet d'un artifice ingénieux : on se serait dit que la détermination de la *proportionnalité* des segments rectilignes s'obtient en détruisant momentanément leur parallélisme, sauf à le rétablir dans l'énoncé final de la réponse stricte à la stricte question.

§ II. Je n'ai pas besoin de dire que j'attache une importance psychologique très grande à ce fait historique, en vertu duquel les grandeurs vectorielles non diversement dirigées dans le plan, finissent par entraîner le constructeur à la fiction d'autres vecteurs diversement dirigés, pour faciliter son travail ! — La proportionnalité des lignes ne s'établit, en Géométrie vraie, que grâce au *truc* des ANGLES.

Mais voici la contre-partie : « Que deviendront nos *similitudes*, dès que nous sortirons du plan ? »

— Réponse : Des « analogies convenables ».

Il est certain que le rapport de deux vecteurs exige *trois* déterminations :

- 1° Un quotient numérique abstrait ;
- 2° Un angle des directions divergentes ;
- 3° Le plan sur lequel on constate la divergence angulaire.

C'est le TERNION initial !

De là ce théorème :

« Deux vecteurs A et B peuvent être déplacés parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à ce qu'ils concourent en un même point origine et soient correctement coplanaires. — Arrivés en cet état, leur rapport est à la fois *quotientiel* et *angulaire*. »

Par conséquent nous pouvons deviner que la biradiale formée par le vecteur-produit et le vecteur-multiplicande est composée de deux segments rectilignes ayant entre eux le rapport quotientiel et angulaire, que nous avons trouvés entre le multiplicateur et l'unité.

§ 12. Ici une pose nécessaire : une biradiale analytiquement représentée constitue un quaternion et non pas un « ternion ». — Si le ternion suffit, il faut renoncer à la découverte de Hamilton, carrément et non pas sournoisement !

Ce sommaire dilemme ne tient pas : Car, personne n'a, jusqu'ici, déterminé la *Solidarité obligatoire des biradiales analogues*. — Voilà pourquoi il n'est pas question de renverser, ni de modifier, ni d'améliorer la méthode hamiltonienne. — On cherche AUTRE CHOSE. — Voilà tout.

Le calcul des ternions consisterait donc à présenter la multiplication des vecteurs, dans l'espace, sans descendre de l'abstraction conventionnelle et fictive à la réalité concrète, mais en remontant bien plutôt du concret mécanico-géométrique à l'abstrait pur de l'analyse.

Cette tentative est issue de l'esprit didactique, avant tout, et ne vise aucunement à la découverte officielle !

Il s'agit d'étendre progressivement, gradativement et sans secousse, la notion, la nature et l'enseignement des Règles de la Multiplication.

IV. — Il est évident que le *strict* rapport géométrique de deux vecteurs, l'un vis-à-vis de l'autre, offre à l'esprit un sens *immé-*

diat, abstraction faite de l'unité choisie pour l'évaluer. Mais cette *binarité* pure tient à ce que l'un des deux vecteurs est implicitement pris pour l'unité non mentionnée. Dès lors il se trouve que la valeur relative de l'autre vecteur, avec sa déviation angulaire plane, suffit à tout.

Or le problème de la multiplication introduit en somme une seconde biradiale dont l'un des rayons est caché. On dit ceci, par exemple : « Sur les arêtes indéfinies d'un angle trièdre S , on prend $SA = 1$, $SB = V'$ et $SC = V''$ et il est question de construire un quatrième vecteur $SD = x$, tel que $V' : 1 :: x : V''$; dans toute la force du terme.

§ 13. DISCUSSION. — $V' = 3$, $V'' = 4$ et $x = 12$, pour mieux spécifier le cas et se débarrasser des nombres *nus*.

Ce que nous savons encore, je suppose, c'est que x doit faire avec V'' le même *anglan plan* que V' avec le vecteur-unité. Soit α , cet angle.

Donc, dira-t-on à première vue, il y a une infinité de solutions, attendu que le vecteur x peut tourner librement autour du vecteur V'' sans cesser de se comporter avec ce vecteur comme il convient... ?

Soit : Il y a une infinité de solutions *passables*; mais il y en a une *meilleure* que les autres : c'est précisément celle qui permet en même temps d'affirmer que le vecteur x fait avec V' le même angle β que V'' fait avec le vecteur-unité. Car rien en somme ne justifie la distinction fonctionnelle de V' et de V'' , en tant que multiplicande ou multiplicateur.

Toute élection à cet égard est gratuite de notre part :

Le produit de deux vecteurs est une conception née de la Géométrie plane, et nous ne sommes pas obligés d'introduire une nouvelle condition de dissymétrie, une hypothèse de *successivité* dans une donnée où tous les éléments sont *co-existants*. Je dirais volontiers que dans la multiplication de deux vecteurs, il y a deux multiplicandes et point de multiplicateur prédilectif, ou que — du moins — cette conception immédiate, intuitive et spontanée, l'emporte philosophiquement sur celle des quaternions artificiels et symboliques. La commutativité, c'est l'épreuve cruciale, le vrai contrôle ou *contre-rôle*.

Plus directement encore : Deux biradiales égales et coplanaires sont nécessairement comprises entre deux autres biradiales égales et coplanaires ; deux biradiales égales non-coplanaires ne sont pas nécessairement comprises entre deux autres biradiales égales, mais *peuvent* l'être. Dans ce dernier cas, elles représentent quatre vecteurs en proportion géométrique aussi parfaite que s'il y avait co-planarité. — On pourrait dire qu'il y a co-planarité *virtuelle*, dont l'*actuelle* n'est qu'un cas plus particulier.

Un angle solide tétraédrique à faces articulées formant des angles dièdres essentiellement variables, de zéro à 180 degrés, et sur les arêtes desquels on prend les 4 vecteurs $\cdot 1, V', V'', x$; tel est, dans l'espace, le dispositif impeccable de la multiplication $V' \times V'' = V''' \times V' = x$.

Il en résulte effectivement l'égalité des faces opposées, dans l'angle tétraèdre susdit.

CONCLUSION

Lorsque quatre grandeurs peuvent se coupler deux à deux et peuvent donner lieu à *certaines analogies*, en passant d'un couple à l'autre, on se trouve en présence d'une PROPORTION.

L'enseignement mathématique manque malheureusement de terme générique pour englober les divers *rappports* que les grandeurs sont susceptibles d'entretenir. On dit bien, en langue courante : « A est à B, comme a est à b. » — Mais, jusqu'à présent du moins, on ne voit pas clairement ce que c'est que ÊTRE A... ?

Il serait peut être inconvenant de dire que la *métaphysique* est la lèpre de l'esprit humain... Je me contenterai donc de soutenir que la démangeaison de l'abstrait, que le prurit de la généralisation illimitée a un inconvénient proverbial :

« Trop gratter cuit ! »

Ainsi j'avais cru un instant, à tort, que le langage le meilleur pourrait être le suivant :

« A est fonction de B, comme a est fonction de b. »

Cela conduirait très simplement, en effet, à ramener toutes les proportions, à l'idée fondamentale : $y = f(x)$. A étant une cer-

taine valeur de y pour $x = B$; a étant une seconde valeur de y pour $x = b$; il y a quelque raison de poser : A est à B comme a est à b .

§ 14. Le premier cas résulte de la fonction élémentaire $y = x + K$, K étant une constante finie, positive ou négative. — Dès lors : A est à B , comme a est à b , signifie proprement que A dépasse B , comme a dépasse b .

Ce genre de rapport, par équidifférence, n'exclut pas la diversité des objets comparés, de groupe à groupe. Ainsi il n'est pas douteux que 8 chapeaux est à 6 chapeaux, comme 15 lampes est à 13 lampes, en ce sens que le même *excédent* de deux unités se retrouve ici et là. C'est précaire, mais cela existe.

La fonction élémentaire $y = Kx$ nous fait passer des rapports par équidifférence aux rapports équiquotientiels. Cette fois : A contient B comme a contient b .

Mais on aurait tort de considérer d'autres fonctions élémentaires quelconques, à moins d'en donner un motif mathématiquement plausible.

Peut-on admettre, par exemple, que 4 soit à 16, comme 7 est à 49, en ce sens que 4 est racine carrée de 16 comme 7 l'est de 49?

Peut-on supposer que $\frac{2}{3}$ soit à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ comme $\frac{1}{2}$ est à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, sous prétexte que l'angle de 60 degrés a pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$, au même titre que l'angle de 45 degrés a $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

C'est en examinant impartialement ces questions que l'on est amené à découvrir le *quid proprium* des proportions dignes de ce nom, savoir : la possibilité de changer de place les *moyens* ou les *extrêmes*. Dès lors l'expression large : *Est à comme... est à*, se réduit subitement à l'équidifférence et à l'équiquotient. $A - B = a - b$, ou bien $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Voilà tout.

§ 15. Autrefois on écrivait en style de proportions, au moyen de points séparés ou groupés par deux ou par quatre. On ne traduisait malheureusement que par les mots : *Est à, comme, est à...* Ce fut donc un réel progrès que de traduire en style d'équa-

tions, au moyen du signe canonique : (\equiv), par des algorithmes distincts :

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B = a - b; \quad \text{d'où} \quad A - B + b - a = 0, \quad \text{d'une part.} \\ \frac{A}{B} = \frac{a}{b}; \quad \text{d'où} \quad \frac{A \times b}{B \times a} = 1, \quad \text{d'autre part.} \end{array} \right.$$

Pédagogiquement, il faut le répéter cent fois, cela veut dire que nous ne connaissons, en mathématiques élémentaires ou supérieures, que deux opérations *officiellement* commutatives : l'addition et la multiplication, et que cette vérité revient à affirmer que zéro est logarithme de un, dans tous les systèmes possibles et concevables !

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La somme des moyens} = \text{la somme des extrêmes :} \\ \text{Le produit} \quad \quad \quad \quad \quad = \text{le produit} \quad \quad \quad \quad \quad \end{array} \right.$$

Tel est le bilan de nos connaissances sur les proportions non abusivement conçues.

Il s'agissait donc de voir, à ce point de vue précis, l'extension *maxima* de la proportion par quotient, autrement dit : « l'égalité propre de deux rapports quotientiels obtenus par des constructions géométriques. »

§ 16. C'est à ce moment que se présente à l'esprit du philosophe-mathématicien l'*indissolubilité* des deux conceptions : direction et grandeur, grandeur et direction, sans hiérarchie prédictive... — Retenez bien cela.

Au reste, s'il y avait une préséance rationnelle, il faudrait placer la *direction* avant la *grandeur* (géométrique).

On arrive, de proche en proche, à cette proposition remarquable, savoir : « que le *multiplicateur* doit *tourner* autour de l'UNITÉ, comme le *produit*, lui aussi, doit tourner autour du MULTIPLICANDE, en conservant un rapport quotientiel défini et une divergence angulaire définie. » Bref : « le lieu géométrique des situations du produit est un cône circulaire droit tout pareil au lieu géométrique des situations du multiplicateur, chacune à chacune. »

En somme l'unité est une longueur-unité et un *axe* fondamental ; le multiplicande est une longueur-unité (secondaire) et un *axe* secondaire. C'est autour de ces deux axes que tournent res-

pectivement le multiplicateur et le produit, de façon à conserver une solidarité déterminable en chaque position, et avec *criterium* de réversibilité parfaite.

Cette solidarité relève de la Cinématique; et nous l'avons *matérialisée* au moyen d'une *bielle* non décrite jusqu'à ce jour, sauf erreur bibliographique et facile à corriger.

Il en résulte une généralisation non abusive des vecteurs *co-planaires* en vecteurs *syntropiques*, dont les *co-planaires* ne sont plus qu'une photographie instantanée et casuelle. — Cette idée paraît féconde.

§ 17. La composition des « couples » ne doit pas, en effet, donner une solution double, à moins que les rotations ne soient *successives*. La « parodie » sphérique de l'aboutage des vecteurs α et β , donne $(\alpha + \beta)$ différent de $(\beta + \alpha)$; mais l'aboutage n'est pas le type exclusif de l'addition des vecteurs ni des arcs. Une parodie meilleure est celle du parallélogramme des forces.

Il faut donc donner aux deux arcs-vecteurs la même origine, terminer le triangle sphérique et mener un arc médian que l'on prolonge ensuite d'une quantité égale à lui-même. Tel est l'analogue de la *diagonale* représentant la résultante *unique*.

Plus directement, dans l'espace, on construira un angle solide tétraèdre, ayant des faces opposées égales. Sur les arêtes il sera toujours possible de prendre quatre longueurs formant deux biradiales égales comprises entre deux autres biradiales égales.

Cette intuition géométrique est au-dessus des *impedimenta* de l'analyse : il m'importe peu que l'on calcule ou que l'on ne calcule point au moyen de symboles tétralogiques qualifiés *quaternions*. — Une muraille de Chine, fort respectueuse sans aucun doute, environne pour moi le céleste Hamilton, soit dit sans ironie. — Ce qu'il faut professer avant tout, c'est le QUATERNION ancestral de la « proportion géométrique » intelligible par soi-même, avant toutes les algèbres...

§ 18. Et puisque je prononce en finissant ce mot au pluriel, les ALGÈBRES, je tiens à dire que la grande conception d'A. Comte au sujet du calcul des « fonctions indirectes » est plus scientifique que jamais. Introduire artificiellement dans le calcul des algorithmes quelconques, et les faire disparaître en fin d'opéra-

tions comme un échafaudage provisoire ; tout le génie de l'analyse est là. Pédagogiquement je voudrais donc que la méthode infinitésimale, celle des quaternions et autres... fussent exposées en bloc par le professeur historien.

Il aurait qualité pour faire voir que la langue des calculs est fort souvent circonlocutionnelle ou périphrastique, mais que cela n'a rien de compromettant, en ce sens que nos conceptions fondamentales des choses restent toujours telles quelles.

Les algébristes *pur sang* sont comme les banquiers : ils travaillent sur des symboles ; et leurs spéculations ne valent que par la possibilité de retraduire le tout en langage économique réel.

RAOUL BARON (Paris).

SUR LA MÉTHODE EN GÉOMÉTRIE

D'APRÈS M. JACQUES HADAMARD

Bien que le livre tout entier mérite assurément qu'on s'y arrête, je ne veux parler ici que de quelques pages des *Leçons de Géométrie* de M. Jacques HADAMARD : elles ont pour titre : *Sur la méthode en Géométrie*, et les conseils qu'elles contiennent doivent être médités par les élèves et par les maîtres. Dégager la méthode de recherche, les objets sur lesquels doit se fixer l'attention ; contribuer ainsi à l'éducation de cette faculté, c'est-à-dire à la fois de la volonté et de l'intelligence, tel est le but de l'auteur ; ce but, tous les maîtres dignes de ce nom, qui croient que la science donne de la vigueur aux esprits qui s'en nourrissent, doivent l'avoir devant les yeux.

Cette éducation de l'attention, pour ce qui est des mathématiques, se fait par l'habitude même de la recherche et par une bonne direction donnée à l'habitude. C'est cette direction qui est l'objet propre de M. Hadamard. Il est certain qu'elle peut résulter, au moins pour les meilleurs esprits, de l'habitude elle-même, de l'étude du cours, de l'application de ce cours à des exercices