

SUR LA MÉTHODE EN GÉOMÉTRIE D'APRÈS M. JACQUES HADAMARD

Autor(en): **Tannery, Jules**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1239>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tions comme un échafaudage provisoire ; tout le génie de l'analyse est là. Pédagogiquement je voudrais donc que la méthode infinitésimale, celle des quaternions et autres... fussent exposées en bloc par le professeur historien.

Il aurait qualité pour faire voir que la langue des calculs est fort souvent circonlocutionnelle ou périphrastique, mais que cela n'a rien de compromettant, en ce sens que nos conceptions fondamentales des choses restent toujours telles quelles.

Les algébristes *pur sang* sont comme les banquiers : ils travaillent sur des symboles ; et leurs spéculations ne valent que par la possibilité de retraduire le tout en langage économique réel.

RAOUL BARON (Paris).

SUR LA MÉTHODE EN GÉOMÉTRIE

D'APRÈS M. JACQUES HADAMARD

Bien que le livre tout entier mérite assurément qu'on s'y arrête, je ne veux parler ici que de quelques pages des *Leçons de Géométrie* de M. Jacques HADAMARD : elles ont pour titre : *Sur la méthode en Géométrie*, et les conseils qu'elles contiennent doivent être médités par les élèves et par les maîtres. Dégager la méthode de recherche, les objets sur lesquels doit se fixer l'attention ; contribuer ainsi à l'éducation de cette faculté, c'est-à-dire à la fois de la volonté et de l'intelligence, tel est le but de l'auteur ; ce but, tous les maîtres dignes de ce nom, qui croient que la science donne de la vigueur aux esprits qui s'en nourrissent, doivent l'avoir devant les yeux.

Cette éducation de l'attention, pour ce qui est des mathématiques, se fait par l'habitude même de la recherche et par une bonne direction donnée à l'habitude. C'est cette direction qui est l'objet propre de M. Hadamard. Il est certain qu'elle peut résulter, au moins pour les meilleurs esprits, de l'habitude elle-même, de l'étude du cours, de l'application de ce cours à des exercices

gradués ⁽¹⁾. Les règles à suivre ressortent des exemples, et l'on finit par s'y conformer sans y penser. Mais est-il bon de n'y pas penser, est-il bon que l'habitude soit inconsciente ? Pour ceux à qui le commerce des mathématiques a donné d'excellentes habitudes, il y a un véritable intérêt philosophique à reconnaître en quoi consistent ces habitudes, en quoi et pourquoi elles sont excellentes, comment elles aident à découvrir la vérité, au moins dans un domaine particulier ; s'ils arrivent à reconnaître dans quelle mesure elles peuvent être transportées ailleurs que dans ce domaine, et combien, dans la réalité, la complication des données et des inconnues s'oppose à la simplicité des raisonnements mathématiques ; ils n'y perdront rien pour leur conduite dans la vie. Mais cette connaissance de la méthode, du chemin qu'il faut prendre, des pièges qu'il faut éviter importe encore plus aux commençants qui, en entrant dans une région toute nouvelle pour eux, s'y sentent perdus et se découragent souvent sans raison. Parmi ceux qui ont poursuivi l'étude des mathématiques, qui ne se rappelle des moments de désespoir devant des questions d'une simplicité enfantine ? Et combien se sont dépités en reconnaissant l'inutilité des efforts qu'ils avaient faits ? Combien d'autres se sont abandonnés au découragement, ont fermé leur livre, bouché leurs oreilles, laissé passer le temps d'apprendre les éléments, qui ne se retrouve plus ? Combien de ceux-là auraient pu être sauvés si, à ce moment, un maître leur avait montré, sur le problème même qui les décourageait, *pourquoi* ils n'arrivaient pas à le résoudre ; si au lieu de leur donner la solution de ce problème, solution qui leur reste d'autant plus étrangère qu'elle est plus élégante et concise, il leur avait indiqué, à la clarté confuse du but, le chemin qui mène vers cette solution, s'il leur avait dit pourquoi ce chemin-là était sans doute le vrai ; si, tout le long, tantôt les précédant, tantôt les suivant, il les avait encouragés et soutenus. Autant qu'un texte imprimé peut remplacer la parole vivante, la note de M. Hadamard sera, pour les commençants, ce maître-là.

(1) On ne saurait trop recommander, à ce point de vue, le recueil de problèmes de M. PETERSEN, qui a été composé avec un art consommé. A ces problèmes, M. PETERSEN a joint d'ailleurs d'excellents conseils, mais qui se rapportent plutôt aux *méthodes particulières* qu'à la méthode en général.

A quelques lecteurs superficiels, elle paraîtra composée de truïsmes. Dégager des truïsmes, c'est peut-être la vraie besogne du philosophe. Qu'une règle semble évidente à celui qui est accoutumé à l'appliquer, c'est la preuve que la règle est bonne ; c'est l'habitude même qui confère à cette règle son caractère d'évidence, et la facilité avec laquelle on l'applique qui la fait paraître inutile. Cette facilité n'a pas été acquise sans efforts ; plus tôt on aura une conscience claire de la règle, moins on fera d'efforts stériles. Apprendre à travailler utilement, c'est le moyen sûr d'apprendre à aimer le travail, et le bénéfice est moral autant qu'intellectuel. Je ne serais pas étonné que M. Hadamard ait eu quelque arrière-pensée de ce genre, qui l'a soutenu quand il a écrit sa Note, et l'a décidé à braver des plaisanteries faciles.

C'est la partie de la note intitulée « Théorèmes à démontrer » qui est la plus importante. L'auteur réduit à trois les règles à appliquer.

1° *Substituer les définitions aux définis*, « ce qui, disait Pascal, ne change jamais le sens du discours ». L'illustre écrivain n'a pas craint d'insister sur cette règle dans son *Art de persuader*. Même dans sa généralité et sa banalité, elle est bonne à répéter ; l'expérience le montre assez ; mais M. Hadamard lui donne une portée considérable en regardant comme définition d'une figure toute propriété qui est équivalente à la définition primitive, c'est-à-dire qui appartient à la figure et n'appartient qu'à cette figure. Le cercle, par exemple, peut être regardé comme le lieu des points équidistants d'un point fixe, ou le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés passent par deux points fixes, ou comme le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes soit constant. Toutes ces propriétés, pour me borner à celles-là, peuvent être regardées comme des définitions équivalentes du cercle. S'il entre un cercle dans le théorème qu'il a à démontrer, l'élève devra se les rappeler toutes et choisir celle qui lui paraît se rapprocher davantage de la conclusion.

2° *Se servir de toute l'hypothèse*. Je veux remarquer en passant que cette règle suppose que la question est *bien posée*. C'est sur des questions bien posées que les élèves doivent s'exercer ; ils ont assez à faire à chercher les intermédiaires entre l'hypothèse

et la conclusion, à distinguer nettement *toute* l'hypothèse et les degrés de la démonstration où interviennent les diverses parties de cette hypothèse; M. Hadamard leur conseille avec raison de faire cette dernière recherche sur les démonstrations mêmes des propositions classiques. Quand ils auront été longtemps rompus à cet exercice, quelques-uns apprendront à se poser des questions : c'est là, à proprement parler, le commencement du travail de recherche : heureux ceux qui parviendront un jour à discerner, dans l'infinie complexité des choses, les éléments simples qui permettent de traduire une question physique en un problème mathématique, bien posé. Comment, alors, se servir de *toute* l'hypothèse?... Mais nous voilà bien loin des débuts de la Géométrie. Revenons-y avec la troisième règle de M. Hadamard.

3^o *Donner à l'énoncé toutes les formes dont il est susceptible et choisir entre ces formes.* Retourner sous toutes ses faces l'hypothèse et la conclusion, les transformer en hypothèses ou en conclusions équivalentes, de manière à les rapprocher, à saisir deux formes qu'il soit possible de relier par des intermédiaires, voilà, au fond, ce qui reste arbitraire dans le travail de l'étudiant, c'est le champ où s'exerce son libre effort. La première règle, sous sa forme générale consiste à dire : Sachez exactement ce que vous voulez démontrer, sachez le sens des mots; sous la forme plus précise que lui donne l'auteur « passer en revue les diverses définitions », elle contient la troisième règle, puisque, aussi bien, les diverses formes de l'hypothèse et de la conclusion, ce sont les diverses définitions de cette hypothèse et de cette conclusion : encore convenait-il d'y insister, car une *même* définition a plusieurs faces entre lesquelles il faut choisir.

Dans les questions faciles, qui conviennent au débutant, il s'agira seulement de distinguer deux formes de l'hypothèse et de la conclusion qui se recouvrent exactement, ou dont la première enveloppe entièrement la seconde; plus tard, on devra lui donner à démontrer des théorèmes où une forme de l'hypothèse ressemble à une forme de la conclusion et l'attire en quelque sorte; à lui de trouver le lien qui les réunit; plus tard encore, sa vue s'aiguïsera, il deviendra capable de saisir des rapports plus lointains et plus cachés, des liens plus nombreux et plus subtils.

C'est sur des exemples multiples et bien choisis, traités avec tous les détails nécessaires, que M. Hadamard montre la valeur des règles qu'il a résumées, la raison du succès quand on les applique comme il faut, les erreurs où l'on tombe quand on les oublie : je suis assuré que ceux qui le suivront pas à pas dans ces exemples seront convaincus de l'utilité de son œuvre.

La seconde partie de la note se rapporte aux lieux géométriques et aux problèmes de construction ; l'auteur explique comment les principes qu'il a développés dans la première partie, doivent être entendus et appliqués dans ces deux sortes de questions ; je ne m'y arrêterai pas.

La troisième partie est la plus « savante » ; c'est celle qui, sans doute, a coûté le moins d'effort à l'auteur, et probablement celle qu'il aurait sacrifié le plus volontiers. Il aurait eu tort de le faire. L'extraordinaire développement scientifique auquel nous assistons n'a pas accru la durée de la vie moyenne, ni augmenté la capacité cérébrale des enfants, ni avancé l'âge auquel ils sont en mesure de commencer les études scientifiques : de là la nécessité de condenser ces études, de faire pénétrer plus de choses dans l'enseignement élémentaire, si l'on veut que tous bénéficient de l'accroissement de la science et que quelques-uns deviennent capables d'y contribuer. Les idées que les génies créateurs ont découvertes sur les sommets descendent peu à peu, s'infiltrent dans les éléments, les pénètrent et les renouvellent lentement. Cela est nécessaire, et les admirateurs d'Euclide doivent en prendre leur parti. Dans ce rajeunissement des éléments, il faut du tact et même un peu de timidité : c'est sous forme d'exercices, de remarques incidentes, de compléments, que les idées nouvelles s'introduisent d'abord ; peu à peu, elles arrivent à ne plus effrayer, elles deviennent plus familières, elles prennent la place qui leur est due dans l'enseignement. Je ne voudrais pas dire du mal des exercices qui n'ont pas d'autre valeur que d'être des exercices : il en faut, et beaucoup ; mais ils doivent être reconnus comme tels et ne doivent ni encombrer l'enseignement classique, ni surcharger la mémoire des étudiants : le bon maître sait choisir de temps en temps des exercices d'une autre nature où pénètre une idée importante, une méthode nouvelle qu'il fera ressortir et dont l'étudiant verra les prolongements. Une remar-

que, faite en passant, peut être comme une fenêtre ouverte sur l'infini de la science.

Une leçon complémentaire, qui retrace à grands traits plusieurs méthodes, qui les relie, qui en montre la puissance, voilà ce qu'est la troisième partie de la note de M. Hadamard. Aucune idée n'a plus d'importance, en mathématiques, que celle de transformation. C'est tout d'abord une idée directrice, c'est elle qui apporte l'ordre dans les choses : comme on l'a dit bien des fois, les propositions du premier, du second, du troisième livre se groupent autour des transformations par translation, par rotation, par homothétie et similitude. La puissance des méthodes de transformation pour la découverte et l'enchaînement des vérités mathématiques est maintenant connue de tous, et les plus simples de ces méthodes sont entrées dans l'enseignement classique. M. Hadamard les rappelle rapidement pour en montrer la portée, pour expliquer en quoi elles se ressemblent, en quoi elles diffèrent.

Mais l'idée de transformation est elle-même dominée par l'idée de *groupe*, et l'auteur a cru que le moment était venu de faire descendre dans les éléments cette notion capitale. Il s'adresse, bien entendu, aux élèves déjà avancés, à ceux qui ont acquis, non pas beaucoup de connaissances géométriques, mais l'habitude du raisonnement géométrique, à ceux qui sont capables de généraliser et d'abstraire, et que la science attire, en dehors des préoccupations d'examen : il leur explique ce que c'est qu'une *forme réduite*, qu'un *invariant*, qu'un *groupe*, comment l'existence des invariants dérive de celle des groupes, par l'intermédiaire des formes réduites, et comment l'existence d'invariants communs à une catégorie de transformations montre que ces transformations forment un groupe. Tous les élèves, assurément, ne liront pas cette troisième partie, et quelques professeurs, peut-être, estimeront qu'elle contient des idées qui ne sont pas à la portée de leurs élèves ; mais ils ne pourront s'empêcher de reconnaître que ces idées, même sans être professées explicitement, permettent, sur quelques points, de donner à l'enseignement une meilleure forme et à quelques propositions élémentaires un sens plus profond.

JULES TANNERY (Paris).