

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA THÉORIE DES VECTEURS

Autor(en): **Fontené, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1219>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR L'ENSEIGNEMENT

DE LA THÉORIE DES VECTEURS

I. — On peut exposer la théorie des quantités complexes et la théorie des quaternions indépendamment de toute notion géométrique, et se proposer ensuite d'en faire l'application à la Géométrie. On interprète $a + bi$ dans un plan qui a deux dimensions, a et b étant les projections d'un vecteur sur deux axes rectangulaires ; on interprètera $a + bi + cj + dk$, symbole à quatre termes, dans un espace qui n'a que trois dimensions, au moyen d'un ensemble (a, OM) constitué par un nombre a et un vecteur OM dont les projections sur trois axes rectangulaires sont b, c, d : il me semble que l'on devrait donner un nom à cet ensemble, par exemple celui de *scal-vecteur*, qui rappelle l'expression connue *partie scalaire*. Un pareil mot est peut-être encore plus utile si, comme je le suppose ici, et comme il y a avantage à le faire pour gagner les commençants, on expose la théorie géométrique avant la théorie analytique.

Par définition, le rapport de deux vecteurs OA et OB est un *scal-vecteur* (a, OC) , que l'on définit aisément en partant du cas où les vecteurs sont rectangulaires : c'est même ainsi que la notion de l'ensemble (a, OC) se présente quand on ne part pas des quaternions ; mais la notion de cet ensemble doit être dégagée de la notion de rapport de deux vecteurs à propos de laquelle on la présente ; si l'on n'écrit pas $\frac{OB}{OA} = (a, OC)$, si l'on n'a pas un mot pour désigner l'ensemble obtenu, l'esprit s'arrête à la notion de rapport, et ne va pas jusqu'à la notion de l'ensemble. L'esprit s'arrête d'autant mieux à la notion de rapport que l'on donne un nom à ce rapport : on l'appelle une *biradiale* ; cette expression est inutile puisqu'on peut dire le rapport $\frac{OB}{OA}$, elle conduit à parler mal en confondant parfois sous le même nom le rapport dont il s'agit et la figure que ce rapport concerne, et elle a, je le répète, l'inconvénient de trop arrêter la pensée sur une notion qui, pour

être utile, n'en est pas moins secondaire ; on pourrait la supprimer. J'ajoute ceci : à propos du rapport de deux vecteurs rectangulaires, OA et OB, on dit parfois que l'on représente ce rapport $\frac{OB}{OA}$, cette biradiale rectangle si l'on veut, par un vecteur OC perpendiculaire au plan AOB ; c'est un langage incorrect : ce rapport *est* un vecteur, par définition.

Réciproquement, tout scal-vecteur (a, OC) est le rapport de deux vecteurs OA et OB, et peut être *mis sous la forme* $\frac{OB}{OA}$, la figure AOB pouvant se déplacer dans son plan...

Cela est important, parce qu'on en déduit la définition de la somme et du produit de deux scal-vecteurs, somme et produit qui sont des scal-vecteurs ; on démontre d'ailleurs que l'addition de deux scal-vecteurs se fait en opérant séparément sur les nombres et sur les vecteurs : on pourrait avantageusement la définir ainsi pour ne pas rompre l'analogie entre la définition déjà donnée de l'addition des vecteurs et la définition de l'addition des scal-vecteurs qui sont l'extension des vecteurs, quelle que soit d'ailleurs l'origine qu'on leur a donnée ; et l'on démontrerait la relation $\frac{OB}{OA} + \frac{OC}{OA} = \frac{OB + OC}{OA}$.

La multiplication des scal-vecteurs ne peut être définie géométriquement que par la relation $\frac{OB}{OA} \times \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{OA}$: *mais l'emploi des biradiales n'est ici qu'un moyen*, et l'on opère en réalité sur des scal-vecteurs ; les commençants ne le voient pas toujours, parce qu'ils s'attachent à la biradiale auxiliaire qui porte un nom, et oublient le scal-vecteur qu'on ne leur a pas nommé : ils peuvent croire que la théorie qu'on leur expose est construite avec deux éléments, le vecteur pour l'addition, la biradiale pour la multiplication, tandis qu'elle est construite avec un seul élément, le scal-vecteur, réduit à un vecteur au début de l'exposition. Relativement à la division des scal-vecteurs, définie par la relation *diviseur* \times *quotient* = *dividende*, ou par la relation équivalente $\frac{OC}{OA} : \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$, il importe de faire observer que le quotient de deux vecteurs est un scal-vecteur identique à celui qu'on a défini comme étant le rapport des deux vecteurs.

II. — Le calcul des quaternions comprend celui des quantités

complexes ; mais comme nous interprétons $a + bi$ dans un plan ayant deux dimensions, et $a + bi + ej + dk$ dans un espace qui n'en a que trois, la seconde théorie géométrique ne comprend pas la première comme cas particulier. C'est ainsi que la biradiale $\frac{OB}{OA}$ de la théorie plane est un vecteur du plan (naturellement), tandis que la biradiale $\frac{OB}{OA}$ de la théorie générale est un scal-vecteur, dont le vecteur est d'ailleurs perpendiculaire au plan AOB. Un commençant doit être averti que si l'on effectue deux calculs analogues, l'un sur les vecteurs auxquels donnent lieu n points d'un plan, l'autre sur les vecteurs auxquels donnent lieu n points de l'espace, on n'obtiendra pas deux théorèmes de géométrie analogues, supposé que la multiplication intervienne ; si le théorème plan a un analogue dans l'espace, le calcul vectoriel qui démontrera ce dernier théorème sera très différent du calcul vectoriel qui a donné le premier. La formule de Bellavitis pour le quadrangle plan quelconque, $DA \times BC + DB \times CA + DC \times AB = 0$, donne un théorème dont l'énoncé géométrique ne ressemble en rien à l'énoncé du théorème auquel conduit l'étude du premier membre de cette formule lorsque ABCD est un tétraèdre, et ce dernier théorème n'a même aucun sens pour le quadrangle plan (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 340, question 1801) ; d'autre part, le théorème plan qui résulte de la formule de Bellavitis a son analogue dans l'espace, comme il résulte d'une Note que je me propose de publier dans le journal cité plus haut.

G. FONTENÉ (Paris).

NOTE DE LA DIRECTION. — Dans le calcul vectoriel basé sur la *méthode de Grassmann*, les inconvénients que signale M. Fontené ne se présentent pas ; aussi croyons-nous utile de signaler cette méthode. Voir à ce sujet, les œuvres du grand géomètre allemand, *Hermann Grassmann's gesammelte Werke* (2 volumes parus) et les ouvrages de W. SCHLEGEL, *System der Raumlehre* (1872-75) ; de PEANO, *Calcolo geometrica* (1888), édition allemande (1891) ; de F. KRAFT, *Abriss des geometrischen Kalküls* (1893) ; et de BURALI-FORTI, *Introduction à la Géométrie différentielle* (1897).