

# CERCLE ET ELLIPSE CERCLES CONCENTRIQUES ET ELLIPSES CONCENTRIQUES HOMOTHÉTIQUES

Autor(en): **Kilbinger, Dr G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1247>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

8. — L'administration du séminaire est confiée à un directeur nommé par le Ministre de l'Instruction. Les examens sont subis devant une commission nommée par le Ministre et choisie parmi les professeurs appartenant au séminaire, ou dont les cours se rattachent à celui-ci.

Ces plans d'études répondent bien aux exigences actuelles. Ils montrent que l'on a bien compris que pour qu'un diplôme d'actuaire puisse offrir une certaine garantie, il était indispensable d'accorder une place importante aux travaux pratiques.

Nous pouvons ajouter que, dès le début, la fréquentation de ces nouveaux cours a été très forte. Ce succès prouve d'une façon évidente que cet enseignement répondait à un réel besoin. Il faut espérer que dans les divers pays, les hautes écoles ne tarderont pas à imiter ce qui se fait à Vienne et à Gottingue en ouvrant leurs portes aux cours relatifs à la science de l'actuaire.

H. FEHR.

---

## CERCLE ET ELLIPSE

CERCLES CONCENTRIQUES ET ELLIPSES CONCENTRIQUES  
HOMOTHÉTIQUES (1)

---

La dépendance mutuelle des figures géométriques, telle qu'elle est étudiée dans la Géométrie de position, offre souvent l'avantage de déduire, de propriétés ou de propositions connues, d'autres qui leur sont analogues. Grâce à elle, les élèves de nos établissements secondaires dans lesquels on enseigne les principes fondamentaux de la Géométrie de position ont toute facilité d'approfondir et de compléter les connaissances acquises. La méthode que nous employons dans cette Note fournit la preuve de notre affirmation. Nous nous bornons, pour le moment, au cas du plan; dans une Note ultérieure nous examinerons la question analogue pour l'espace.

Dans deux systèmes alliés ou en affinité, à tout point à l'infini

---

(1) REYE, *Geometrie der Lage*. 1. Abthlg. 4. Auflage; Vortrag 16. 2. Abthlg. 3. Aufl.; Vortrag 7.

de l'un des systèmes correspond un point à l'infini de l'autre ; aux lignes parallèles de l'un des systèmes correspondent des lignes parallèles de l'autre ; à tout parallélogramme un parallélogramme, à toute ponctuelle une ponctuelle projective semblable.

Deux figures quelconques de l'un des systèmes sont entre elles dans le même rapport que les figures correspondantes de l'autre ; et par suite à deux figures égales de l'un des systèmes correspondent deux figures égales de l'autre.

Si deux courbes du second ordre sont alliées, tout système de cordes parallèles de l'une des courbes a pour correspondant un système de cordes parallèles de l'autre courbe ; et si deux tangentes de l'une des courbes sont parallèles, les correspondantes de l'autre sont également parallèles. Il en résulte que dans deux ellipses ou dans deux hyperboles alliées, les diamètres se correspondent entre eux et par conséquent aussi les centres, et de plus, tout couple de diamètres conjugués de l'une des courbes a pour correspondant un couple de diamètres conjugués de l'autre.

Un cercle quelconque peut être allié à une ellipse, et les deux courbes peuvent être regardées comme courbes homologues des systèmes plans alliés. Soient donnés le cercle  $k$  et l'ellipse  $k_1$ , et supposons que ce soient deux courbes homologues des systèmes plans alliés  $\tau_i$  et  $\tau_{i_1}$ . Alors on peut facilement faire dériver des théorèmes élémentaires connus du cercle, des théorèmes correspondants concernant l'ellipse.

Nous jugeons à propos de placer deux théorèmes correspondants en regard l'un de l'autre.

Des théorèmes de gauche, nous concluons de droite :

*a)* Tout parallélogramme circonscrit au cercle  $k$  étant un losange ou un carré, les diagonales sont perpendiculaires ; elles représentent par conséquent un couple de diamètres conjugués.

*b)* Le parallélogramme inscrit au cercle  $k$  étant un rectangle ou un carré, ses côtés seront parallèles à deux diamètres conjugués.

*a')* Dans tout parallélogramme circonscrit à l'ellipse  $k_1$  les diagonales sont deux diamètres conjugués.

*b')* Dans tout parallélogramme inscrit à l'ellipse  $k_1$ , les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués.

Les théorèmes précédents peuvent aussi s'énoncer comme il suit :

Les deux cordes qui joignent un | Les deux cordes qui joignent un

point quelconque de la circonférence  $k$  aux extrémités d'un diamètre, sont parallèles à deux diamètres conjugués.

point quelconque de l'ellipse  $k_1$  aux extrémités d'un diamètre, sont parallèles à deux diamètres conjugués.

Nous ajouterons encore :

c) Les points milieux de toutes les cordes du cercle  $k$  qui passent par un seul et même point  $P$ , sont situés sur une même circonférence  $l$ . La droite qui joint  $P$  au centre de  $l$  passe aussi par le centre de  $k$ .

c') Les points milieux de toutes les cordes de l'ellipse  $k$ , qui passent par un seul et même point  $P_1$  sont tous situés sur une ellipse  $l_1$  (1). La droite qui joint  $P_1$  au centre de  $l_1$  passe aussi par le centre de  $k_1$ .

Cette discussion du cercle et de l'ellipse devient encore plus intéressante si l'on examine les cercles concentriques et les ellipses concentriques homothétiques.

Soient donnés le cercle  $k$  et l'ellipse  $k_1$  appartenant respectivement aux systèmes alliés  $\tau_1$  et  $\tau_{11}$ ; soit de plus  $c$  un cercle concentrique à  $k$ ; alors la courbe correspondante de  $\tau_{11}$  sera une ellipse  $c_1$  concentrique à  $k_1$ , parce que dans un cercle deux diamètres conjugués sont perpendiculaires l'un à l'autre et que par conséquent, tout couple de diamètres conjugués de  $k$  coïncide avec un couple de diamètres conjugués de  $c$ ; ils s'ensuit donc que les couples de diamètres conjugués de même que les axes des ellipses  $k_1$  et  $c_1$  coïncident. On nomme  $k_1$  et  $c_1$  « ellipses concentriques homothétiques ».

Des théorèmes de gauche il s'ensuit à droite :

a) Toute sécante  $s$  commune aux deux cercles concentriques  $k$  et  $c$  est coupée par les circonférences de manière que les milieux des deux cordes situées sur  $s$  coïncident.

a') Toute sécante  $s_1$  commune aux deux ellipses concentriques homothétiques  $k_1$  et  $c_1$  est coupée par les courbes de manière que les milieux des deux cordes situées sur  $s_1$  coïncident.

b) Les centres d'un système de cordes parallèles de  $k$  et  $c$  sont situés sur un diamètre commun aux deux cercles.

b') Les centres d'un système de cordes parallèles de  $k_1$  et  $c_1$  sont situés sur un diamètre commun aux deux ellipses.

c) Les tangentes menées en des points de  $k$  et  $c$  aux extrémités d'un

c') Les tangentes menées en des points de  $k_1$  et  $c_1$  aux extrémités d'un

(1) L'ellipse  $l_1$  ne saurait être une circonférence, les systèmes plans  $\tau_1$  et  $\tau_{11}$  n'étant point semblables mais seulement alliés.

même diamètre sont perpendiculaires à ce diamètre et par conséquent parallèles entre elles.

d) Menons par le centre  $O$  commun aux cercles  $k$  et  $c$  deux rayons qui coupent  $k$  et  $c$  respectivement en  $A, B$  et  $C, D$ . Alors si nous menons les droites  $AB$  et  $CD$ , les triangles  $AOB$  et  $COD$  seront semblables et par conséquent  $AB$  sera parallèle à  $CD$ .

e) Les pôles d'une droite  $g$  par rapport aux cercles  $k$  et  $c$  sont situés sur un même diamètre, qui est perpendiculaire et par suite conjugué à  $g$ .

f) Les polaires d'un point  $P$  par rapport aux cercles  $k$  et  $c$  sont perpendiculaires au diamètre  $PO$  et par conséquent parallèles entre elles.

g) Les polaires de deux points quelconques  $P$  et  $Q$  par rapport aux cercles  $k$  et  $c$  se coupent deux à deux sur un diamètre commun aux deux cercles.

même diamètre sont parallèles entre elles.

d') Menons par le centre  $O_1$  commun aux deux ellipses  $k_1$  et  $c_1$  deux rayons qui coupent  $k_1$  et  $c_1$  respectivement en  $A_1, B_1$  et  $C_1, D_1$ . Alors si nous menons les droites  $A_1B_1$  et  $C_1D_1$ , ces deux droites seront parallèles, parce que  $AB$  est parallèle à  $CD$  et les triangles  $A_1O_1B_1$  et  $C_1O_1D_1$  seront semblables. D'où la proportion  $O_1A_1 : O_1C_1 = O_1B_1 : O_1D_1$ .

e') Les pôles d'une droite  $g_1$  par rapport aux cercles  $k_1$  et  $c_1$  sont situés sur un même diamètre qui est conjugué à  $g_1$ .

f') Les polaires d'un point  $P$  par rapport aux ellipses  $k_1$  et  $c_1$  sont parallèles entre elles.

g') Les polaires de deux points quelconques  $P_1$  et  $Q_1$  par rapport aux ellipses  $k_1$  et  $c_1$  se coupent deux à deux sur un diamètre commun aux deux cercles.

Pour démontrer le dernier théorème de gauche, nous raisonnerons comme il suit :

Soient  $r$  et  $r_1$  respectivement les rayons des cercles  $k$  et  $c$ ;  $p$  et  $p'$  les polaires de  $P$ ;  $q$  et  $q'$  les polaires de  $Q$  par rapport aux cercles  $k$  et  $c$ ; et soient  $R, S$  les points d'intersection de  $OP$  et  $p$ , et de  $OP$  et  $p'$ ;  $T, U$  ceux de  $OQ$  et  $q$ , et de  $OQ$  et  $q'$ .

Nous désignons encore le point d'intersection de  $q$  et  $p$  par  $V$ , et ceux des droites  $OV$  et  $p$ ,  $OV$  et  $q$ , respectivement par  $W$  et  $W_1$ : on démontre alors que les points  $W$  et  $W_1$  coïncident.

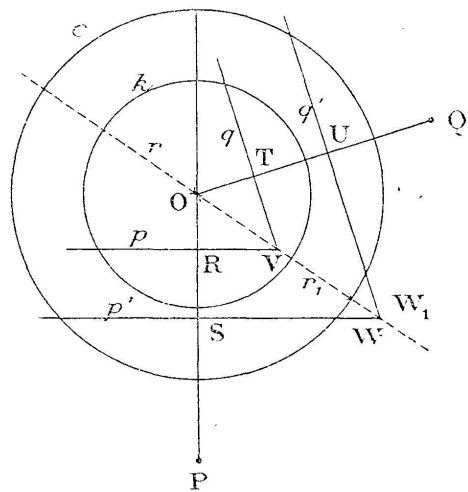


Fig. 1.

En effet, nous avons d'abord les relations :

$$\begin{aligned} r^2 &= OR \cdot OP = OT \cdot OQ, \\ r_1^2 &= OS \cdot OP = OU \cdot OQ, \end{aligned}$$

dont on déduit

$$(1) \quad \frac{OR}{OS} = \frac{OT}{OU}.$$

La similitude des triangles ORV, OSW et OTU, OUW, donne lieu aux proportions :

$$(2) \quad \frac{OR}{OS} = \frac{OV}{OW} \cdot \quad \frac{OT}{OU} = \frac{OV}{OW_1}, \quad (3)$$

d'où il résulte, en vertu de (1) :

$$\frac{OV}{OW} = \frac{OV}{OW_1}.$$

On a par conséquent

$$OW = OW_1, \quad c. q. f. d.$$

Les secteurs d'un cercle compris entre deux rayons conjugués égalent  $\frac{r^2 \pi}{4}$ , et par suite les secteurs correspondants d'une ellipse alliée au cercle ont pour mesure  $\frac{ab\pi}{4}$ , parce qu'aux figures égales du système  $\eta$  correspondent des figures égales du

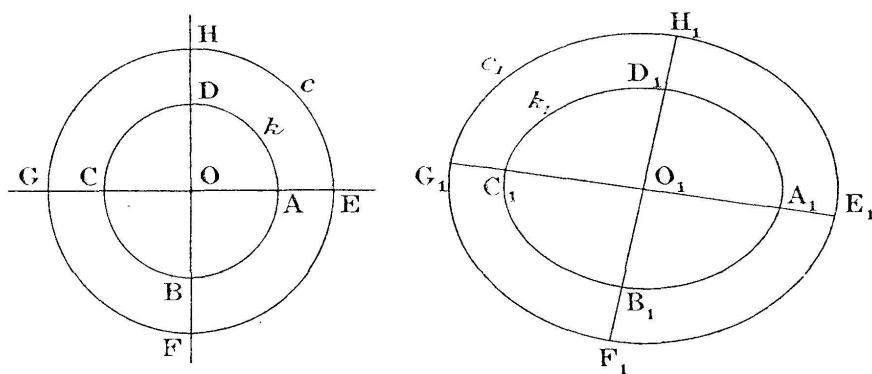


Fig. 2.

système allié  $\eta_1$ . (Nous désignons par  $r$  le rayon du cercle et par  $a, b$  les demi-axes de l'ellipse.)

Soient OII et OE, OG et OF deux couples de rayons conjugués des deux cercles  $k$  et  $c$ ; supposons qu'ils coupent  $k$  en A, B, C, D; alors la différence des deux secteurs : OIIE — OAD =

OGF — OCB ; et pour les ellipses  $k_1$  et  $c_1$  nous aurons d'une manière analogue la différence des secteurs :  $O_1H_1E_1 - O_1A_1D_1 = O_1G_1F_1 - O_1C_1B_1$ .

En généralisant ce dernier résultat nous pouvons dire :

« Les secteurs de couronne elliptique compris entre deux rayons conjugués de deux ellipses concentriques homothétiques et les deux arcs correspondants ont la même aire. »

Si l'on envisage dans le système plan  $\tau_1$  tout le faisceau des cercles concentriques à  $k$ , les ellipses formeront dans le système plan  $\tau_1$  un « faisceau d'ellipses concentriques homothétiques ». Les résultats obtenus ci-dessus pourront être résumés comme suit :

« Des ellipses concentriques homothétiques ont le même faisceau de diamètres conjugués. Le faisceau de ces mêmes ellipses est déterminé par une seule d'entre elles. Par un point quelconque du plan on peut mener une seule ellipse du faisceau. Les points milieux d'un système de cordes parallèles sont situés sur un même diamètre. Les tangentes menées aux ellipses du faisceau aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles entre elles. A une ellipse donnée on peut en construire une seconde, concentrique et homothétique à la première, en augmentant ou en diminuant les rayons de la première dans un même rapport donné. » Le centre des ellipses en est donc le point de similitude. « Les pôles d'une droite  $q$  par rapport à un faisceau d'ellipses concentriques homothétiques sont situés sur le diamètre conjugué à la droite  $q$ , et les polaires d'un point P sont parallèles entre elles. Les points d'intersection des polaires de deux points donnés sont situés sur un diamètre ; les polaires elles-mêmes forment donc deux faisceaux de droites parallèles. Les ellipses du faisceau déterminent sur une droite quelconque les couples de points d'une involution symétrique, et l'une d'elles est tangente à la droite au centre de symétrie. »

En observant que les sommets des carrés circonscrits à un cercle  $k$  sont situés sur un cercle concentrique à  $k$ , nous trouverons que les sommets des parallélogrammes circonscrits à l'ellipse alliée  $k_1$  et dont les côtés opposés sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués sont situés sur une ellipse concentrique homothétique à l'ellipse  $k_1$ .

Dans deux systèmes alliés, ou en affinité, deux figures homologues sont dans un rapport constant. Or le lieu du point d'intersection de deux tangentes du cercle  $k$  faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est un cercle concentrique au premier. Donc nous trouvons semblablement que le lieu du point d'intersection de deux tangentes de l'ellipse  $k_1$  faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est une ellipse concentrique homothétique à la première.

D<sup>r</sup> G. KILBINGER (Mulhouse).

## REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DES DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION  
D'UNE VARIABLE

1. — Il peut être utile, pour ceux qui abordent l'étude du Calcul différentiel, de représenter géométriquement les différentielles successives d'une fonction d'une variable  $x$  : c'est un moyen de fixer dans l'esprit l'hypothèse essentielle que  $dx$  est constant à partir de la différentielle seconde. On peut procéder comme il suit.

La fonction  $y = f(x)$  étant représentée par une courbe  $C$ , menons au point  $M$  la tangente  $MM_0$ , et traçons  $MA_0$  parallèle à  $Ox$ ,  $M_0A_0$  parallèle à  $Oy$  ;  $M$  variant, si l'on suppose

$$MA_0 = \text{const.} = a,$$

$M_0$  décrit une courbe  $C_0$ . Au point  $M_0$  de la courbe  $C$ , menons la tangente  $M_0M_1$ , et traçons  $M_0A_1$  parallèle à  $Ox$ ,  $M_1A_1$  parallèle à  $Oy$ , en prenant

$$M_0A_1 = MA_0 = a;$$

$M$  variant,  $M_1$  décrit une courbe  $C_1$ . On obtient de même les