

# REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE des différentielles successives d'une fonction d'une variable

Autor(en): **Fontené, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1248>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dans deux systèmes alliés, ou en affinité, deux figures homologues sont dans un rapport constant. Or le lieu du point d'intersection de deux tangentes du cercle  $k$  faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est un cercle concentrique au premier. Donc nous trouvons semblablement que le lieu du point d'intersection de deux tangentes de l'ellipse  $k_1$  faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est une ellipse concentrique homothétique à la première.

D<sup>r</sup> G. KILBINGER (Mulhouse).

## REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DES DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION  
D'UNE VARIABLE

1. — Il peut être utile, pour ceux qui abordent l'étude du Calcul différentiel, de représenter géométriquement les différentielles successives d'une fonction d'une variable  $x$  : c'est un moyen de fixer dans l'esprit l'hypothèse essentielle que  $dx$  est constant à partir de la différentielle seconde. On peut procéder comme il suit.

La fonction  $y = f(x)$  étant représentée par une courbe  $C$ , menons au point  $M$  la tangente  $MM_0$ , et traçons  $MA_0$  parallèle à  $Ox$ ,  $M_0A_0$  parallèle à  $Oy$  ;  $M$  variant, si l'on suppose

$$MA_0 = \text{const.} = a,$$

$M_0$  décrit une courbe  $C_0$ . Au point  $M_0$  de la courbe  $C$ , menons la tangente  $M_0M_1$ , et traçons  $M_0A_1$  parallèle à  $Ox$ ,  $M_1A_1$  parallèle à  $Oy$ , en prenant

$$M_0A_1 = MA_0 = a;$$

$M$  variant,  $M_1$  décrit une courbe  $C_1$ . On obtient de même les

courbes successives  $C_2, C_3, \dots$ . On a alors au point  $M$ ,  $dx$  étant  $a$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} dy = A_0 M_0, \\ d^2y = A_1 M_1 - A_0 M_0, \\ d^3y = A_2 M_2 - 2 A_1 M_1 + A_0 M_0, \\ d^4y = A_3 M_3 - 3 A_2 M_2 + 3 A_1 M_1 - A_0 M_0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} \right.$$

Pour le voir, on prend un point  $M'$  voisin de  $M$  sur la courbe  $C$ ; on considère les points  $M'_0, M'_1, M'_2, \dots$ , et les points  $A'_0, A'_1, A'_2, \dots$ ; on désigne par  $I_p$  le point où la parallèle à  $Oy$  menée par  $M'_p$  est coupée par la parallèle à  $Ox$  menée par  $M_p$ , et l'on a les points  $I, I_0, I_1, I_2, \dots$ . La formule  $dy = A_0 M_0$  étant évidente, on procède de proche en proche. Si l'on suppose par exemple la formule exacte pour  $d^3y$ , cette fonction de  $x$  a une dérivée, limite du rapport

$$\frac{(A'_2 M'_2 - A_2 M_2) - 2 (A'_1 M'_1 - A_1 M_1) + (A'_0 M'_0 - A_0 M_0)}{MI};$$

le numérateur est égal à

$$(I_2 M'_2 - I_1 M'_1) - 2 (I_1 M'_1 - I_0 M'_0) + (I_0 M'_0 - I M')$$

ou

$$I_2 M'_2 - 3 I_1 M'_1 + 3 I_0 M'_0 - I M';$$

le rapport peut s'écrire

$$\frac{I_2 M'_2}{M_2 I_2} - 3 \frac{I_1 M'_1}{M_1 I_1} + 3 \frac{I_0 M'_0}{M_0 I_0} - \frac{I M'}{MI},$$

et la limite, ou la dérivée de  $d^3y$ , est

$$m_3 - 3 m_2 + 3 m_1 - m_0,$$

$m_0, m_1, \dots$  étant les coefficients angulaires des tangentes  $MM_0, M_0 M_1, \dots$ ; on a donc la formule ci-dessus pour  $d^4y$ , qui est par définition la différentielle de  $d^3y$ , ou le produit par  $a$  de la dérivée de cette fonction.

2. — A propos de représentations géométriques, on peut observer ceci. Dans la démonstration du théorème des fonctions

composées, pour le cas où l'on a  $y = f(u, v)$ ,  $u$  et  $v$  étant des fonctions de la variable  $x$ , il est utile de considérer la surface  $Y = f(U, V)$ ,  $U$  et  $V$  étant ici deux variables indépendantes, avec trois axes  $OU$ ,  $OV$ ,  $OY$ . On interprète les dérivées partielles par les sections  $V = v$ ,  $U = u$ . La fonction  $y$  de la variable  $x$  est représentée par une courbe gauche, intersection de la surface précédente et du cylindre  $u = \varphi(x)$ ,  $v = \psi(x)$ . On suit bien la démonstration sur la figure.

3. — Puisque je parle de Calcul différentiel, j'indiquerai en terminant un moyen d'alléger un peu dans la forme la démonstration de la formule de Taylor. Après avoir écrit l'égalité

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} R,$$

qui définit le nombre  $R$ , on peut dire : considérons deux variables  $x$  et  $y$  liées par la relation

$$x + y = a + h,$$

et soit la fonction de la variable  $x$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \dots + \frac{y^n}{n!} f^n(x) + \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} R;$$

cette fonction est égale à  $f(a + h)$  pour  $x = a$ , d'où résulte  $y = h$ , et elle prend la même valeur pour  $x = a + h$ , d'où résulte  $y = 0$ ; donc, dans les conditions connues, sa dérivée est nulle pour  $x = a + \theta h$ . Or cette dérivée est, à cause de  $y' = -1$ ,

$$\frac{y^n}{n!} \left[ f^{n+1}(x) - R \right];$$

donc on a

$$R = f^{n+1}(a + \theta h).$$

G. FONTENÉ (Paris).