

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1899)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE des différentielles successives d'une fonction d'une variable  
**Autor:** Fontené, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1248>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dans deux systèmes alliés, ou en affinité, deux figures homologues sont dans un rapport constant. Or le lieu du point d'intersection de deux tangentes du cercle  $k$  faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est un cercle concentrique au premier. Donc nous trouvons semblablement que le lieu du point d'intersection de deux tangentes de l'ellipse  $k_1$  faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est une ellipse concentrique homothétique à la première.

D<sup>r</sup> G. KILBINGER (Mulhouse).

## REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DES DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION  
D'UNE VARIABLE

1. — Il peut être utile, pour ceux qui abordent l'étude du Calcul différentiel, de représenter géométriquement les différentielles successives d'une fonction d'une variable  $x$  : c'est un moyen de fixer dans l'esprit l'hypothèse essentielle que  $dx$  est constant à partir de la différentielle seconde. On peut procéder comme il suit.

La fonction  $y = f(x)$  étant représentée par une courbe  $C$ , menons au point  $M$  la tangente  $MM_0$ , et traçons  $MA_0$  parallèle à  $Ox$ ,  $M_0A_0$  parallèle à  $Oy$  ;  $M$  variant, si l'on suppose

$$MA_0 = \text{const.} = a,$$

$M_0$  décrit une courbe  $C_0$ . Au point  $M_0$  de la courbe  $C$ , menons la tangente  $M_0M_1$ , et traçons  $M_0A_1$  parallèle à  $Ox$ ,  $M_1A_1$  parallèle à  $Oy$ , en prenant

$$M_0A_1 = MA_0 = a;$$

$M$  variant,  $M_1$  décrit une courbe  $C_1$ . On obtient de même les

courbes successives  $C_2, C_3, \dots$ . On a alors au point  $M$ ,  $dx$  étant  $a$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} dy = A_0 M_0, \\ d^2y = A_1 M_1 - A_0 M_0, \\ d^3y = A_2 M_2 - 2 A_1 M_1 + A_0 M_0, \\ d^4y = A_3 M_3 - 3 A_2 M_2 + 3 A_1 M_1 - A_0 M_0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} \right.$$

Pour le voir, on prend un point  $M'$  voisin de  $M$  sur la courbe  $C$ ; on considère les points  $M'_0, M'_1, M'_2, \dots$ , et les points  $A'_0, A'_1, A'_2, \dots$ ; on désigne par  $I_p$  le point où la parallèle à  $Oy$  menée par  $M'_p$  est coupée par la parallèle à  $Ox$  menée par  $M_p$ , et l'on a les points  $I, I_0, I_1, I_2, \dots$ . La formule  $dy = A_0 M_0$  étant évidente, on procède de proche en proche. Si l'on suppose par exemple la formule exacte pour  $d^3y$ , cette fonction de  $x$  a une dérivée, limite du rapport

$$\frac{(A'_2 M'_2 - A_2 M_2) - 2 (A'_1 M'_1 - A_1 M_1) + (A'_0 M'_0 - A_0 M_0)}{MI};$$

le numérateur est égal à

$$(I_2 M'_2 - I_1 M'_1) - 2 (I_1 M'_1 - I_0 M'_0) + (I_0 M'_0 - I M')$$

ou

$$I_2 M'_2 - 3 I_1 M'_1 + 3 I_0 M'_0 - I M';$$

le rapport peut s'écrire

$$\frac{I_2 M'_2}{M_2 I_2} - 3 \frac{I_1 M'_1}{M_1 I_1} + 3 \frac{I_0 M'_0}{M_0 I_0} - \frac{I M'}{MI},$$

et la limite, ou la dérivée de  $d^3y$ , est

$$m_3 - 3 m_2 + 3 m_1 - m_0,$$

$m_0, m_1, \dots$  étant les coefficients angulaires des tangentes  $MM_0, M_0 M_1, \dots$ ; on a donc la formule ci-dessus pour  $d^4y$ , qui est par définition la différentielle de  $d^3y$ , ou le produit par  $a$  de la dérivée de cette fonction.

2. — A propos de représentations géométriques, on peut observer ceci. Dans la démonstration du théorème des fonctions

composées, pour le cas où l'on a  $y = f(u, v)$ ,  $u$  et  $v$  étant des fonctions de la variable  $x$ , il est utile de considérer la surface  $Y = f(U, V)$ ,  $U$  et  $V$  étant ici deux variables indépendantes, avec trois axes  $OU$ ,  $OV$ ,  $OY$ . On interprète les dérivées partielles par les sections  $V = v$ ,  $U = u$ . La fonction  $y$  de la variable  $x$  est représentée par une courbe gauche, intersection de la surface précédente et du cylindre  $u = \varphi(x)$ ,  $v = \psi(x)$ . On suit bien la démonstration sur la figure.

3. — Puisque je parle de Calcul différentiel, j'indiquerai en terminant un moyen d'alléger un peu dans la forme la démonstration de la formule de Taylor. Après avoir écrit l'égalité

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} R,$$

qui définit le nombre  $R$ , on peut dire : considérons deux variables  $x$  et  $y$  liées par la relation

$$x + y = a + h,$$

et soit la fonction de la variable  $x$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \dots + \frac{y^n}{n!} f^n(x) + \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} R;$$

cette fonction est égale à  $f(a + h)$  pour  $x = a$ , d'où résulte  $y = h$ , et elle prend la même valeur pour  $x = a + h$ , d'où résulte  $y = 0$ ; donc, dans les conditions connues, sa dérivée est nulle pour  $x = a + \theta h$ . Or cette dérivée est, à cause de  $y' = -1$ ,

$$\frac{y^n}{n!} \left[ f^{n+1}(x) - R \right];$$

donc on a

$$R = f^{n+1}(a + \theta h).$$

G. FONTENÉ (Paris).