Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1899)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: G. Lazzeri e A. Bassani, professori nella R. Accademia Navale. —Elementi di Geometria. seconde edition ameliorée ; I vol. in-8", 312 figures dans le texte ; prix : 5 L. : Livourne, R. Giusti. 1898.

Autor: Ripert, L.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

G. Lazzeri e A. Bassani, professori nella R. Accademia Navale. — **Elementi di Geometria**, seconde édition améliorée ; 1 vol. in-8°, 312 figures dans le texte ; prix : 5 L. : Livourne, R. Giusti, 1898.

Les *Éléments de Géométrie*, dont deux savants professeurs de l'académie navale d'Italie, MM. Lazzeri et Bassani, viennent de publier la 2e édition (la première a paru en 1891), sont établis d'après des principes entièrement nouveaux, résultant de deux idées fondamentales.

La première est la nécessité de rendre l'étude de la géométrie *indépendante de l'Arithmétique et de l'Algèbre*. Les auteurs pensent, avec les éminents professeurs Sannia et d'Ovidio, que c'est le moyen le plus propre à ramener à l'antique pureté l'enseignement de la Géométrie élémentaire, que Legendre et ses imitateurs avaient, disent-ils, obscurci en employant souvent le calcul arithmétique à démontrer des vérités que quelques arguments, fondés sur la simple intuition, servent suffisamment à faire accepter d'une manière plus directe et plus appropriée. Ils observent d'ailleurs que cette nécessité a été depuis longtemps reconnue par tous ceux qui s'occupent de l'enseignement classique, par exemple par Houel et par Duhamel.

La seconde idée fondamentale, — et peut-être la plus importante, — consiste dans l'application franche à l'enseignement de la *fusion intime et systématique* de la géométrie plane avec celle de l'espace. Cette fusion, dont l'idée n'est pas nouvelle, a été tentée pour la première fois en Italie, par de Paolis, dans ses *Éléments de Géométrie*, publiés en 1884. Elle était, disent les auteurs, considérée comme une utopie à l'époque de la publication de la première édition de leur livre ; mais, en peu d'années, l'idée a fait beaucoup de chemin. Les auteurs, qui professent depuis douze ans la géométrie d'après cette idée à l'académie navale, ont rallié à elle un grand nombre de professeurs italiens. L'Association *Mathesis* pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires italiennes a proposé à tous les professeurs, comme thème de discussion, l'opportunité de la fusion des deux géométries, et le vœu qu'il soit pris une décision à cet égard est exprimé, dans le rapport présenté au nom de ladite association, en mai 1897, au ministre de l'instruction publique, par le professeur Bettazzi.

En Allemagne, la question de la fusion des deux géométries commence également à s'agiter, comme le prouve le rapport fait par le Dr Rohn à la 44e réunion des philologues et professeurs allemands, tenue à Dresde en 1897.

En France, l'on est moins avancé et la question ne semble pas avoir pénétré jusqu'à présent dans les sphères officielles. Il convient cependant de rappeler une tentative très curieuse faite en 1844. Nous avons entre les mains, depuis longtemps déjà, un volume devenu rare, intitulé : « *Les Analo-*

« *gies de la Géométrie élémentaire*, ou *la Géométrie dans l'espace ramenée à* « *la Géométrie plane*, ouvrage conçu de manière que tout élève, après avoir « compris une proposition quelconque de Géométrie plane, pourra, de lui-« même, s'élever immédiatement et presque sans effort, à tous les cas sem-« blables de la géométrie dans l'espace », par A. Mahistre, licencié ès sciences, professeur de mathématiques, etc. (Paris, Hachette, 1844).

Le titre un peu long de cet ouvrage, qui a été autorisé le 14 mai 1844 par le Conseil de l'instruction publique, montre bien que son principe était le deuxième principe fondamental de MM. Lazzeri et Bassani. Le livre de Mahistre comprend deux parties : 1° *Géométrie plane et ses analogies avec la Géométrie dans l'espace*, exposée en 261 pages ; 2° *Géométrie dans l'espace (partie indépendante)*, exposée en 9 pages. Ces nombres 261 et 9 (ou 29 et 1) ne sont peut-être pas loin d'exprimer la proportionnalité vraie de la Géométrie élémentaire fusionnée et de la Géométrie de l'espace indépendante.

MM. Lazzeri et Bassani font remarquer d'ailleurs que la fusion des deux Géométries n'est pas en réalité une nouveauté. Son utilité est reconnue sans contestation pour la Géométrie projective. Monge est le premier qui, dans son *Traité de Géométrie descriptive*, en a donné des exemples, en démontrant à l'aide des figures à trois dimensions, un grand nombre de théorèmes relatifs aux figures planes, avec une simplicité et une évidence desquelles on resta bien loin quand on voulut faire usage des seuls éléments du plan. Beaucoup d'autres, notamment Brianchon et Poncelet, suivirent les traces de Monge, et aujourd'hui l'on voit la méthode de fusion universellement appliquée en Géométrie projective et en Géométrie supérieure, et préconisée par les plus illustres Géomètres, comme Chasles, Bellavitis et Cremona.

Si la Géométrie élémentaire a été la dernière à utiliser cette méthode, ce n'est pas qu'elle soit moins susceptible d'en tirer parti : mais cela tient peut-être à ce que les géomètres, attirés par les questions neuves qui se présentent en foule à la suite des extraordinaires développements de la Géométrie supérieure, ont trouvé une plus grande satisfaction dans la recherche de nouvelles propriétés que dans l'étude des moyens de perfectionner les méthodes d'enseignement ; et peut-être aussi à ce que les anciennes traditions et l'habitude de plus de vingt siècles ont été un obstacle à une transformation radicale de ces méthodes. Mais l'utilité de la méthode de fusion n'en est pas moins certaine pour la Géométrie élémentaire, comme pour toutes les autres branches de la Géométrie.

L'ouvrage est divisé en cinq livres. Dans les trois premiers sont exposées, d'une manière absolument indépendante de l'idée de *nombre*, les propriétés de position et de grandeur des figures du plan et de l'espace, qui dérivent de la notion fondamentale de l'*égalité* : le quatrième livre établit la théorie des *grandeurs équivalentes*, abstraction faite également de toute idée de nombre ; enfin, le cinquième livre, qui seul implique cette idée, expose la théorie des *grandeurs proportionnelles* et de la *mesure*.

Quelques préliminaires définissent la *proposition*, les diverses variétés et interprétations que ce mot comporte, puis le *problème* et ses opérations, et montrent que la découverte d'un théorème, la résolution d'un problème ou la démonstration d'une proposition énoncée se ramènent à trois méthodes principales : 1° l'analyse ; 2° la synthèse ; 3° la réduction à l'absurde.

Le chapitre Ier du livre Ier définit les *figures géométriques* et aborde leur étude par celle de la *droite* et du *plan*. Les auteurs établissent sept *postulatums*, de l'énoncé desquels ils déduisent ensuite des définitions ; puis, quand il y a lieu, des corollaires, théorèmes ou propriétés. La forme *postulatum*, à laquelle les auteurs ont recours, n'est autre que l'application du premier principe qu'ils ont posé : « Supprimer toute dépendance de l'arithmétique et faire accepter, par quelques arguments, fondés sur la simple intuition, les vérités primordiales de la Géométrie. »

Le chapitre II du livre Ier étudie, d'après les mêmes principes, et au moyen de deux nouveaux postulatums, dont l'un est attribué par les auteurs à Archimède (1), les *segments*, les *angles* et les *dièdres*. Le chapitre III est consacré aux premières notions sur le *cercle* et sur la *sphère*. Le chapitre IV étudie les *droites parallèles*, la *droite parallèle à un plan* et les *plans parallèles* ; il repose sur un dixième postulatum qui n'est autre que le postulatum d'Euclide (2). Enfin le chapitre V expose la théorie des *droites et plans perpendiculaires*, et le livre Ier se termine par les énoncés de 74 *exercices proposés*.

Il nous paraît inutile de donner autant de détails sur le livre II (*Polygones : angles polyèdres : polyèdres ; distances : 237 exercices*), sur le livre III (*Relations entre la droite, le plan et la sphère ; relations des polygones avec un cercle et des polyèdres avec une sphère ; géométrie sur la sphère : surfaces et solides de rotation : 294 exercices*), et sur le livre IV (*Théorie générale de l'équivalence ; équivalence des polygones et surfaces polyédriques ; équivalence des polygones sphériques et pyramides sphériques : équivalence des prismes : grandeurs limites ; équivalence des polyèdres : équivalence du cercle et des corps ronds ; 235 exercices*). Ces sommaires et l'index que l'on trouvera ci-après donnent une idée suffisante de l'étendue et de la variété des matières traitées et de l'unité du plan de l'ouvrage. Nous rappelons seulement, parce que cela est essentiel, que ces quatre premiers livres sont complètement indépendants de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

En ce qui concerne le livre V (*Théorie des proportions : homothétie et similitude ; mesure des longueurs, aires ou volumes ; applications de l'algèbre à la géométrie ; 227 exercices*), les auteurs se sont préoccupés de l'objection qui pourrait leur être faite, qu'ils ne se sont pas conformés à leur premier principe fondamental, puisqu'ils font dépendre les théories de ce livre de la théorie des proportions numériques ; ils ont exposé pourquoi, après de mûres réflexions, ils ne croient nullement être en contradiction avec eux-mêmes. Les très intéressantes considérations qu'ils présentent à cet égard, dans leur préface, peuvent se résumer ainsi : il est dangereux et erroné, au point de vue didactique, de démontrer les propriétés relatives à la position et à l'équivalence des figures par des considérations arithmétiques, parce que, en employant un tel système, l'idée de nombre, qui leur

(1) Ce postulatum, que nous reproduisons à cause de son importance, et aussi pour donner un exemple de la manière dont les auteurs entendent la *fusion*, est le suivant : « Si, sur un segment (ou angle ou dièdre), on porte une suite de segments (ou angles ou dièdres) égaux, de manière que chacun d'eux soit adjacent au précédent et que le premier ait une extrémité (ou un côté ou une face) en commun avec celui qui est donné, on finira par trouver un point (ou un côté ou une face) qui tombera en dehors du segment (ou angle ou dièdre) donné. »

(2) Par un point on ne peut mener qu'une droite parallèle à une droite donnée.

est complètement étrangère, fait perdre de vue leur véritable signification. Mais une proportion, quel que soit l'aspect sous lequel on la considère, exprime en substance que le résultat de la comparaison de deux autres grandeurs homogènes, faites suivant une certaine loi, est égal à celui de la comparaison de deux autres grandeurs également homogènes, faite suivant la même loi. Ces résultats, considérés en eux-mêmes, peuvent être exprimés complètement et clairement par l'idée de rapport, qui implique incontestablement celle de nombre, et ne peuvent être exprimés d'une autre manière.

La 2e édition, actuellement publiée, ne diffère de la première que par quelques modifications, dont la principale est le développement donné au postulatum d'Archimède (ci-dessus énoncé) et à ses conséquences, et par la suppression de quelques matières qui ne s'enseignent pas ordinairement dans les écoles, suppression faite dans le but de réduire l'étendue du volume. Telles sont, par exemple, les propriétés des centres, axes et plans radicaux et des centres de similitude, que les auteurs déclarent d'ailleurs n'avoir retranchées qu'à regret, parce que les chapitres y relatifs étaient une des preuves les plus manifestes du grand avantage que présente la fusion de la Géométrie plane avec celle de l'espace.

En résumé, le livre de MM. Lazzeri et Bassani, bien pensé, écrit avec méthode et rigueur, nous paraît devoir appeler l'attention la plus sérieuse de toutes les personnes qui s'intéressent à l'enseignement. Le principe de la fusion des deux Géométries, considéré hier encore comme une utopie, aujourd'hui devenu une idée dont l'étude s'impose, est destiné peut-être à se transformer, dans un avenir rapproché, en méthode classique pour l'enseignement de la Géométrie élémentaire, en attendant son adoption dans toutes les branches de la Géométrie (1). Si ce progrès se réalise, le livre des professeurs de l'académie navale italienne, déjà appuyé par douze années d'enseignement, y aura puissamment contribué.

L. Ripert (Paris).

INDEX

Préliminaires. — LIVRE Ier. — Chap. Ier. *Les figures géométriques. Droite et plan.* — Chap. II. *Segments, angles et dièdres.* — Chap. III. *Premières notions sur le cercle et sur la sphère.* — Chap. IV. *Droites parallèles. Droite parallèle à un plan. Plans parallèles.* — Chap. V. *Droites et plans perpendiculaires.* — Exercices.

LIVRE II. — Chap. Ier. *Polygones.* Egalité des triangles et des polygones.

(1) Dans un ouvrage paru à peu près en même temps que celui dont il est ici rendu compte, on lit : « On comprend que la plupart des notions générales de » Géométrie analytique....., surtout en ce qui touche la méthode des coordonnées » cartésiennes, sont susceptibles d'une extension à la Géométrie de l'espace..... » L'analogie est tellement manifeste, surtout au point de vue du calcul, qu'il est » permis de se demander s'il n'y aurait pas un véritable intérêt, dans une » exposition doctrinale un peu complète de la Géométrie analytique, à présenter » l'ensemble des théories essentielles concurremment dans le plan et dans » l'espace, et en s'élevant tout naturellement d'une notion à l'autre ; de rares » tentatives ont été timidement faites jusqu'ici dans cet ordre d'idées ; nous » serions étonné si quelque jour elles ne finissaient pas par produire des résultats » efficaces, sous l'influence d'efforts nouveaux et plus énergiques. » (C.-A. Laisant, *La Mathématique, Philosophie. Enseignement*, p. 112 ; Carré et Naud, 1898.)

Constructions des triangles et des polygones. Quadrangles. — Chap. II. *Angoloïdes* (angles polyèdres). Egalité des trièdres et des angoloïdes. Construction des trièdres et des angoloïdes. — Chap. III. *Polyèdres*. Pyramide. Prisme. Parallélipède.— Chap. IV. *Distances*. Quelques problèmes. — Exercices.

LIVRE III. — Chap. Ier. *Relations entre droites, plans et sphères*. Relation d'une droite avec un cercle et d'un plan avec une sphère. Relations des angles avec un cercle. Relations de deux cercles dans un plan ou sur une sphère. Quelques problèmes. — Chap. II. *Relations des polygones avec un cercle et des polyèdres avec une sphère*. Polygones réguliers. Polyèdres réguliers. — Chap. III. *Géométrie sur la sphère*. Angles et polygones sphériques. Cercles sur la sphère. Polygones inscrits ou circonscrits à un cercle sur la sphère. — Chap. IV. *Surfaces et solides de révolution*. Surface conique et cône. Surface cylindrique et cylindre. — Exercices.

LIVRE IV. — Chap. Ier. *Théorie générale de l'équivalence*. — Chap. II. *Equivalence de polygones et surfaces polyédriques*. Transformation des polygones en rectangles équivalents d'une même série. Relation des rectangles, ou carrés, construits sur les côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère. Quelques problèmes. Equivalence de quelques surfaces polyédriques.— Chap. III. *Equivalence des polygones sphériques et des pyramides sphériques*. — Chap. IV. *Equivalence des prismes*. — Chap. V. *Grandeurs limites*. — Chap. VI. *Equivalence des polyèdres*. — Chap. VII. *Equivalence du cercle et des corps ronds*. Equivalence du cercle. Equivalence du volume et de la surface du cylindre. Equivalence de la surface et du volume du cône rond (droit). Equivalence de la surface et du volume de la sphère. — Exercices.

LIVRE V. — Chap. Ier. *Théorie des proportions*. Grandeurs commensurables et incommensurables et grandeurs proportionnelles. Proportionnalité des segments, des surfaces et des volumes. — Chap. II. *Homothétie et similitude*. Figures homothétiques. Figures semblables. Quelques problèmes. — Chap. III. *Mesure*. Unité de mesure. Circonférence du cercle. Aires des surfaces. Volumes des solides.— Chap. IV. *Application de l'algèbre à la Géométrie*. Relations algébriques des éléments d'un triangle, d'un quadrangle inscrit dans un cercle et d'un tétraèdre. Mesure des côtés, des apothèmes et de la surface de quelques polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un cercle en fonction du rayon. Mesure des surfaces et des volumes des polyèdres réguliers. Calcul du nombre π. — Exercices.

L. R.

P. Appell, membre de l'Institut. **Eléments d'analyse mathématique** *à l'usage des ingénieurs et des physiciens*. Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. Prix 24 fr.; Paris, Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine; 1898.

Le style général des traités mathématiques de notre époque a été fixé par les travaux de Lagrange, Laplace, Legendre, Lacroix, Poisson et d'autres mathématiciens français. Ils y ont introduit toutes les ressources de puissance et de délicatesse dont la langue française est si bien pourvue, pour exprimer clairement et logiquement les idées.

Les traditions de ces écrivains sont conservées actuellement avec tant de