

# SUR L'EMPLOI DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Fontené, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1225>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Plus tard, je reviendrai s'il le faut sur ce sujet ; mais j'aimerais mieux ne pas y être contraint. Il y a dans l'enseignement primaire et dans l'enseignement primaire supérieur, à Paris surtout, des hommes d'une très grande valeur. Il leur suffira d'être avisés pour exercer une surveillance un peu plus attentive et pour empêcher qu'on retombe dans d'aussi déplorables errements.

Les observations qui précèdent ont, du reste, une portée bien supérieure à la cause particulière qui les a provoquées. A tous les degrés de l'enseignement et dans tous les pays, depuis l'école primaire jusqu'à l'agrégation, le choix d'un sujet de composition est toujours chose grave et délicate ; *jamais* celui qui en a la responsabilité ne devrait s'acquitter de cette tâche à la légère ; jamais non plus il ne devrait s'en rapporter à lui seul, et le premier de ses soucis devrait être de solliciter un contrôle nécessaire, sans lequel on sera toujours exposé à des bévues désastreuses et irréparables.

C.-A. LAISANT.

---

## SUR L'EMPLOI DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE

---

1. Un grand progrès a été réalisé dans l'enseignement de l'Algèbre en France par le fait que la première leçon d'Algèbre concerne les nombres directifs, ou, si l'on veut, les nombres positifs et négatifs : un grand progrès sera réalisé dans l'enseignement de la Géométrie lorsque l'emploi des segments, des angles algébriques, des aires et des volumes algébriques sera adopté systématiquement, au lieu d'être présenté comme un complément réservé aux meilleurs élèves. Seulement, il faudrait faire deux choses : commencer tôt, et commencer par le commencement. Commencer tôt : dans un cours d'Algèbre destiné aux élèves des classes de lettres, M. A. Grévy débute par les nombres directifs ; quelle raison y a-t-il de ne pas faire de même en

Géométrie? Commencer par le commencement : c'est-à-dire apprendre aux débutants la Géométrie des segments sur une droite, cette Géométrie linéaire qu'ils ne savent jamais bien, parce qu'ils ne l'ont pas apprise à temps, et leur donner par exemple la notion importante de barycentre pour deux points A et B, la formule d'Euler pour quatre points en ligne droite, la formule de Stewart qu'ils n'auront plus qu'à généraliser, etc. ; leur apprendre ensuite la Géométrie des droites qui passent par un point dans un plan, la Géométrie plani-conique, en donnant des signes aux angles : on oriente le plan, on fait observer qu'un angle directif a un côté origine, un côté extrémité, et, distinguant deux cas selon que les droites  $\alpha$  et  $\beta$  sont dirigées ou non, on écrit

$$(\alpha, \beta) = 0 + k. 4^d,$$

ou

$$(\alpha, \beta) = 0 + k. 2^d :$$

on peut alors, par exemple, énoncer correctement la réciproque du théorème des angles opposés par le sommet, sans allonger l'énoncé par des phrases lourdes que la notion d'angle directif remplace avec avantage.

Mais, dira-t-on, les élèves n'ont pas encore fait d'Algèbre ! C'est une raison aussi sérieuse que celle qui empêche de définir les lignes trigonométriques dans le courant du 3<sup>e</sup> livre de Géométrie, comme il serait si utile de le faire. On définira les nombres directifs, leur addition et leur multiplication, dans un chapitre préliminaire ; on établira la formule de Chasles  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  (et il en résultera pour l'Algèbre une démonstration excellente du fait que dans un polynôme on peut intervertir l'ordre des termes) ; etc.

2. Dans un opuscule ayant pour titre *Géométrie dirigée*, édité par la librairie Nony, j'ai proposé d'appeler *transformée* d'une droite dirigée  $\alpha$  une droite dirigée  $\beta$  telle que l'angle  $(\alpha, \beta)$  soit égal à  $+ 1^d$  ; il est en effet ridicule de dire que deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires sont *égaux ou supplémentaires* : quelle géométrie peut sortir de là ? Cette même notion permet encore de définir le signe de la distance d'un point à une droite dirigée, dans un plan orienté ; ce signe peut être rattaché à l'idée

de moment, en considérant une force qui agit suivant la droite, dans le sens positif. On voit alors que le lieu des points équidistants de deux droites est ce qu'on peut appeler la pseudo-bissectrice.

3. Dans un triangle on dirige les trois côtés ; les pseudo-bissectrices sont concourantes, et voilà deux théorèmes réunis en un seul. Dans un polygone, on dirigera volontiers les côtés dans les sens AB, BC, CD, ..., LA, de manière à considérer les angles extérieurs dans le cas d'un polygone convexe.

4. J'ose dire que le théorème du segment capable est une honte pour l'enseignement de la Géométrie. Si l'on désigne par AB ou par BA indifféremment la droite dirigée qui porte les points A et B, on doit dire : *Etant donnés deux points fixes A et B, le lieu des points M pour lesquels on a*

$$(MA, MB) = \alpha + k \cdot 2^d,$$

les droites MA et MB étant dirigées à volonté, est une circonférence entière et une seule ; ici, comme partout, le plan est orienté, l'angle  $\alpha$  a un côté origine et un côté extrémité. On peut alors, pour prendre un exemple simple, montrer que le lieu des points de concours des hauteurs des triangles MAB est une circonférence, donnée par la relation

$$(HB, HA) = \alpha + k \cdot 2^d.$$

Pour quatre points A, B, C, D sur une circonférence, on a toujours

$$(DA, DB) = (CA, CB) + k \cdot 2^d,$$

que le contour ADBC soit convexe ou non ; cela permet par exemple de démontrer correctement le théorème de Simson, en prenant un point M du plan, et en écrivant la condition nécessaire et suffisante pour que ce point fasse partie du lieu cherché.

5. Un cercle dirigé est un cycle. Un triangle dont les côtés sont dirigés a un cycle inscrit et un seul, dont le centre est au point de rencontre des pseudo-bissectrices : cela permet de débrouiller des questions que la notion de cercle inscrit et de

cercles ex-inscrits rend fort confuses, lorsque la figure varie, comme dans les lieux géométriques. Quand un contour quadrangulaire ABCD, convexe ou concave, est circonscrit à un cycle, on a, en dirigeant les tangentes d'après le sens du cycle,

$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0.$$

6. Les aires algébriques intéressent les élèves. L'aire algébrique  $\overline{OACB}$  du rectangle OACB, le point A étant sur  $x'x$ , le point B sur  $y'y$ , donne le meilleur exemple pour la multiplication des nombres directifs. Il est contraire à toute logique de définir l'aire d'un trapèze de seconde espèce comme l'on fait d'ordinaire, sans expliquer la définition, et en la légitimant par le résultat auquel elle conduit. Cela est surtout frappant pour le tronc de pyramide de seconde espèce, où la surface latérale est une différence, tandis que le volume est une somme. Il faut définir l'aire déterminée par un contour polygonal absolument quelconque, en écrivant :

$$\overline{ABCD...L} = \overline{OAB} + \overline{OBC} + \overline{OCD} + \dots + \overline{OLA},$$

et en démontrant que la position du point O est indifférente ; on se sert pour cela de la formule en question, vérifiée pour le cas du triangle. Pour un triangle, en dirigeant les côtés à volonté, et en posant  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{CA} = b$ ,  $\overline{AB} = c$ .

$$a + b + c = 2p.$$

$2p$  étant le périmètre algébrique, on a toujours  $S = pr$ , S étant  $\overline{ABC}$ ,  $r$  étant la distance du centre du cycle inscrit à l'une quelconque des droites dirigées qui portent les côtés.

7. Dans le 3<sup>e</sup> livre, l'essentiel est de donner pour deux triangles qui ont leurs côtés parallèles la formule algébrique (ou directive)

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} :$$

avec cela et la formule de Chasles, un élève peut se tirer d'affaire. On énonce, et l'on démontre d'un seul coup, la formule

$$\overline{AC^2} = \overline{BA^2} + \overline{BC^2} - 2 \overline{BC} \cdot \overline{BH}.$$

Pour le théorème des sécantes dans le cercle, on a

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD},$$

et, comme le théorème est énoncé complètement, la réciproque est vraie ; même observation pour les théorèmes de Ménélaüs et de Jean de Ceva, etc. ; tandis que, en employant des longueurs au lieu de segments, il faut dire en de longues phrases (que l'on supprime trop souvent) que des points en nombre pair ou impair sont sur les prolongements, etc. Sans aller si loin, on énonce incomplètement le théorème de Thalès, et l'on énonce souvent la réciproque comme si les côtés du triangle n'étaient jamais prolongés.

Le problème du partage d'une droite AB en moyenne et extrême raison, avec des longueurs au lieu de segments, donne lieu à une remarque absurde sur l'impossibilité d'une solution au delà du point B, attendu que cette remarque ne serait pas valable si l'on demandait d'avoir par exemple

$$\overline{CA}^2 = 5 \overline{CB} \times \overline{AB},$$

chacun des deux problèmes exprimés par les relations

$$\overline{CA}^2 = 5 \overline{CB} \times \overline{AB}, \quad \overline{CA}^2 = -5 \overline{CB} \times \overline{AB}.$$

ayant deux solutions ; on confond deux problèmes distincts, et il est fort heureux (pour l'enseignement de la géométrie des longueurs) que le problème

$$\overline{CA}^2 = -\overline{CB} \times \overline{AB}$$

n'ait pas de solution.

J'observe en passant que la règle de Descartes, relative à la manière de diriger des droites parallèles, est absolue : pour l'homothétie inverse, par exemple, il faut se conformer à cette règle, bien que l'on soit tenté de faire le contraire, si l'on veut avoir pour deux segments homothétiques  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$ ,  $k$  étant le rapport d'homothétie ; pour des aires, on a  $\frac{S'}{S} = k^2$ , en tenant compte d'un fait géométrique.

8. En ce qui concerne les choses de l'espace, je me conten-

terai de renvoyer à l'ouvrage cité, où j'ai montré que, avec des définitions convenables, la distance d'un point à un plan est égale et de signe contraire à la distance du plan au point; la règle générale de tels changements, pour un espace analytique à  $n - 1$  dimensions, a été donnée en 1892 dans un ouvrage ayant pour titre : *l'Hyperespace*. On devrait tout au moins, pour les trièdres, considérer les dièdres extérieurs, et dire, à propos des trièdres réciproques, que les rectilignes des dièdres extérieurs de l'un sont *égaux* aux faces de l'autre; en Trigonométrie sphérique, il y a également avantage à employer les dièdres extérieurs. (A propos de dièdres, j'observe en passant qu'on ne doit pas définir l'égalité de deux dièdres par superposition, à cause du glissement possible, mais par l'égalité des rectilignes.)

9. Les mots *abscisse*, *argument*, *azimut*, devraient être employés couramment. En cinématique, dans l'enseignement le plus modeste, on devrait dire : l'abscisse  $x$ , et la date  $t$ , le déplacement  $x' - x$ , et l'intervalle de temps  $t' - t$ , et parler peu de l'espace parcouru, que les formules ne connaissent guère; on devrait écrire, au début de la Physique,

$$\left\{ \begin{array}{l} v - v_0 = \gamma (t - t_0), \\ x - x_0 = v_0 (t - t_0) + \frac{\gamma}{2} (t - t_0)^2, \\ v^2 - v_0^2 = 2\gamma (x - x_0), \end{array} \right.$$

ce qui rend les problèmes faciles. En optique, on devrait prendre un sens positif unique, seul moyen de bien faire les problèmes sur les systèmes centrés; la formule des lentilles, déduite par soustraction de la formule des dioptries, n'a rien à voir avec la formule des miroirs, et l'on a tort en mathématiques élémentaires de les rendre semblables; on doit appeler  $R$  l'abscisse du centre, etc.

10. L'interprétation des racines négatives dans les problèmes, souvent utile ou même obligatoire, devrait en beaucoup de cas être remplacée par une mise en équation générale, avec *données* et *inconnues* directives. Combien d'élèves, en Mathématiques élémentaires, savent démontrer d'un seul coup l'équation de la ligne droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

à propos du problème classique de l'intersection de deux droites ? Ils examinent quelques cas, et se trompent généralement en marquant  $a$  comme une longueur sur la figure lorsque  $a$  est négatif ; on les amène à écrire  $-a$ , et ils croient souvent alors que  $-a$  est négatif : ils trébuchent à chaque pas, parce qu'on ne les a pas exercés en Géométrie pure. On a énoncé correctement le problème des courriers ; en parlant de périmètres algébriques, d'aires et de volumes algébriques, on améliorerait beaucoup d'autres énoncés, et l'on ne verrait plus cette chose abominable : l'énoncé d'un problème fabriqué après la solution ; le problème qui consiste à inscrire à un rectangle donné un rectangle semblable à un rectangle donné est massacré si l'on ne tient pas compte du sens de rotation. Le cas douteux des triangles résulte d'un énoncé mal fait : le calcul du troisième côté le montre nettement ; c'est bien assez que la condition de réalité des racines empêche le problème d'être toujours possible, et il ne faut pas qu'une condition de signes soit imposée à la géométrie qui accepte fort bien le négatif.

Il ne faut d'ailleurs pas être excessif. On doit faire des problèmes avec des données et des inconnues segmentaires, et en faire aussi avec des longueurs, ne fût-ce que pour donner aux élèves le sens physique qu'ils ont en général si peu. Les problèmes d'attraction par exemple s'accommodent fort mal des signes  $+$  et  $-$ , et on doit le dire. Même en géométrie, il est souvent difficile de faire un énoncé correct, auquel s'appliquent bien les signes  $+$  et  $-$  ; l'interprétation ordinaire des solutions négatives, et l'introduction après coup de données négatives, sont alors un moyen inférieur auquel on se résigne faute de mieux. Mais il est puéril, à propos d'un problème sur des robinets qui débitent de l'eau, d'interpréter les racines négatives par le moyen que l'on sait : comme le dit fort bien M. Bourget, qu'est-ce qu'un problème voisin d'un autre ? J'ajoute que, au lieu de dire que l'on change  $x$  en  $-x$ , on peut dire : j'appelle  $x'$  le module de  $x$ , et je mets  $-x'$  où il y avait  $x$  ; s'il s'agit de Géométrie,  $x'$  est une longueur de la figure, et l'équation en  $x$  est construite avec l'inconnue  $-x'$  désignée par  $x$  ; on trouve :

$$x = -\alpha, \text{ ou } -x' = -\alpha, \text{ et l'on a } x' = \alpha.$$



11. Une conséquence fatale de l'usage des longueurs au lieu de segments, et en général de l'usage des valeurs absolues, c'est que, quand on est amené à parler de grandeurs directives mesurées par des nombres directifs, d'une part les élèves ont de la peine à comprendre, d'autre part ils sont indifférents à des faits qu'ils ont toujours vu négliger par leurs maîtres. En Trigonométrie, à propos de la définition des lignes complémentaires, on leur démontre que, si un arc (A, M) commence en A et finit en M, le sens positif étant de A vers B, son complément est un arc (B, M) commençant en B et finissant en M, le sens positif étant de B vers A : je ne crois pas que l'ensemble d'une classe comprenne de quoi il s'agit, faute d'habitude de cet ordre d'idées, et le nombre est petit de ceux qui trouvent la chose intéressante. On définit séc  $x$  d'une manière peu naturelle, au lieu d'écrire

$$\text{séc } x = \frac{\overline{OT}}{\overline{OM}},$$

et cela tient surtout à ce que l'on fait ordinairement  $R = 1$ , ce qui est au moins inutile, et conduit à dire *lignes* trigonométriques au lieu de *nombres* ou fonctions trigonométriques ; c'est pour la même raison que, souvent, on démontre en plusieurs fois la formule

$$\text{proj. } AB = AB \cos \alpha,$$

au lieu de la déduire en une seule fois de la définition du cosinus, en écrivant :

$$\cos \alpha = \frac{\text{proj. } AB}{AB},$$

au moyen d'un cercle trigonométrique de centre A et de rayon AB.

Deux triangles qui ont leurs côtés parallèles donnent du premier coup :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\text{tg } x}{\sin x} = \frac{\text{séc } x}{1},$$

on le vérifie souvent dans les quatre quadrants.

On ne donne pas, ou l'on donne avec l'intention de n'en pas faire usage, la formule essentielle :

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\beta, \gamma)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\gamma, \alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha, \beta)},$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  désignent les droites dirigées qui portent les côtés du triangle ; en posant

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, \\ (\beta, \gamma) &= A, (\gamma, \alpha) = B, (\alpha, \beta) = C, \\ a + b + c &= 2p, \end{aligned}$$

on réunit plusieurs formules en une seule, d'autant mieux que les demi-angles interviennent fréquemment, et que, avec les habitudes reçues, on voit  $\sin \frac{A}{2}$  et  $\cos \frac{A}{2}$  se succéder dans des formules dont l'analogie est ainsi masquée. En Mécanique plane, pour deux forces  $P, Q$  et leur résultante  $R$ , on doit écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Q}{\sin (P, R)} &= \frac{P}{\sin (R, Q)} = \frac{R}{\sin (P, Q)}, \\ (P, R) + (R, Q) &= (P, Q), \end{aligned} \right.$$

tandis que, pour trois forces  $P, Q, S$  en équilibre, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Q}{\sin (P, S)} &= \frac{P}{\sin (S, Q)} = \frac{S}{\sin (Q, P)}, \\ (P, S) + (S, Q) + (Q, P) &= 2\pi; \end{aligned} \right.$$

des élèves préparés comprennent fort bien cela.

12. C'est seulement en Mathématiques spéciales que la Géométrie analytique impose l'emploi systématique des grandeurs directives. L'aire d'un triangle, le volume d'un tétraèdre; donnés par un déterminant, ne peuvent être des grandeurs absolues. Dans la formule :

$$\operatorname{tg} V = \frac{m' - m}{1 + mm'},$$

le plan est orienté, l'angle a un côté origine, un côté extrémité, les droites n'étant pas dirigées ; plus d'un élève hésite devant ces idées nouvelles pour lui. En coordonnées polaires, la démonstration de la formule  $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$  serait mieux comprise si l'on était mieux préparé ; même observation pour la formule relative aux asymptotes ; les formules elles-mêmes, indépendamment de la démonstration, ne sont pas toujours bien comprises, faute d'habitude des choses directives. L'ensemble d'une classe est-il inté-

ressé par le fait que l'équation normale  $x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$  dirige la droite, d'où résulte un signe net pour la distance d'un point à cette droite? par le fait que  $\alpha$  est positif de  $Ox$  vers  $Oy$ ,  $\beta$  de  $Oy$  vers  $Ox$ , d'où résulte  $\alpha + \beta = \theta$ , comme en Trigonométrie pour un arc  $(A, M)$  et son complément  $(B, M)$ ? Je ne le crois pas; et l'on peut regretter cette indifférence qui tient au premier enseignement.

13. Je n'ai cité aucun nom, craignant trop de me tromper dans un sujet qui est du domaine public. Chasles, Laguerre surtout, ont beaucoup fait : c'est, je crois, Laguerre qui a donné l'idée du cycle, et la formule essentielle

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\beta, \gamma)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\gamma, \alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha, \beta)}$$

si je ne me trompe, c'est Baltzer qui a donné l'écriture excellente :

$$(\overline{DA}, \overline{DB}) = (\overline{CA}, \overline{CB})$$

pour quatre points d'un cercle; M. Gérard, professeur au lycée Charlemagne, a donné le premier, entre autres choses, la formule :

$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0$$

pour le quadrilatère circonscriptible, et, si je ne l'ai pas cité dans l'opuscule dont j'ai parlé, c'est que je ne connaissais pas les articles qu'il avait publiés dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* dirigé par lui. Bien d'autres se sont préoccupés de la question des signes en Géométrie; il serait temps que l'enseignement profitât des résultats acquis : au XIX<sup>e</sup> siècle, la Géométrie n'est pas *l'art de mesurer la terre*.

G. FONTENÉ (Paris).

NOTE. — En coordonnées cartésiennes dans l'espace, quelle que soit la disposition des axes, on peut dire que l'espace est orienté de  $Oy$  vers  $Oz$  pour l'observateur  $Ox, \dots$ , de  $Ox$  vers  $Oy$  pour l'observateur  $Oz$ ; c'est, je crois, ce que dit Cauchy. En ne parlant ni de gauche ni de droite, on met tout le monde d'accord.

G. F.