

# SUR L'ÉGALITÉ, ET SUR L'INTRODUCTION DES ÉLÉMENTS DÉRIVÉS DANS LA SCIENCE

Autor(en): **Burali-Forti, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1232>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

mais les grandes idées directrices vous resteront. Et plus d'une fois, à l'occasion de questions pratiques se présentant à vous au cours de votre carrière, vous verrez grand profit à consulter ces anciens documents, à vous remettre en mémoire ce que vous savez aujourd'hui, à faire quelques équations, à reprendre certains problèmes de Mécanique rationnelle.

Et, d'un autre côté, la Physique, avec ses perfectionnements, arrivant de plus à plus à pénétrer dans le domaine de la Mécanique, ainsi que je vous l'ai fait comprendre tout à l'heure, et l'immense majorité des questions pratiques que vous aurez à résoudre relevant de la Mécanique directement, ou bien de la Physique, je crois pouvoir avancer la proposition suivante, qui résume la pensée maîtresse de cette conférence :

Pour l'ingénieur, la Mécanique appliquée, c'est le but ; la Mécanique rationnelle, c'est le moyen.

C.-A. LAISANT.

---

## SUR L'ÉGALITÉ, ET SUR L'INTRODUCTION DES ÉLÉMENTS DÉRIVÉS DANS LA SCIENCE

---

1. Lorsqu'on dit dans le langage ordinaire : *l'objet x est égal à l'objet y*, on entend dire que *toute propriété de x est aussi une propriété de y* ; mais le mot tout n'a pas, en général, la signification absolue de *totalité*, car, bien souvent, on considère un groupe spécial de propriétés, et il reste sous-entendu que le mot tout se réfère seulement à ce groupe.

Cela se présente, non seulement dans le langage ordinaire mais aussi dans le langage scientifique. Dans plusieurs traités de Géométrie, même parmi les plus récents, on dit, suivant Euclide : *la figure x est égale à la figure y*, pour exprimer que *x est superposable à y*, faisant de telle sorte abstraction de toute propriété de position des figures géométriques. Euclide exprime par la phrase : *la figure x est égale à la figure y*, ce qui aujourd'hui reste exprimé par la phrase : *x est équivalent à y*. Les deux membres

d'une formule de chimie représentent deux corps qui ont des propriétés bien différentes, en général, et l'égalité se réfère seulement aux poids atomiques.

Si nous écrivons  $x \alpha y$  pour exprimer que l'objet  $x$  est dans la relation  $\alpha$  avec  $y$ , alors les relations exprimées par les phrases ordinaires *est superposable*, *est équivalent*, appartiennent à la catégorie des relations  $\alpha$  qui jouissent des propriétés :

$$(1) \quad \begin{cases} \text{réflexive, c'est-à-dire } x \alpha x, \\ \text{symétrique, c'est-à-dire si } x \alpha y, \text{ alors } y \alpha x, \\ \text{transitive, c'est-à-dire si } x \alpha y \text{ et si } y \alpha z, \text{ alors } x \alpha z, \end{cases}$$

et à la même catégorie appartiennent les relations, *est semblable*, *est parallèle* <sup>(1)</sup>. Alors si on trouve correct d'écrire  $x = y$ , ou bien de dire *x est égal à y*, au lieu de *x est superposable à y*, on doit estimer pouvoir écrire aussi  $x = y$  au lieu de *x est équivalent, semblable, parallèle à y*, car, si dans le premier cas l'égalité se réfère seulement aux propriétés métriques des figures, dans les autres cas elle se réfère seulement, et respectivement, aux propriétés d'*extension*, de *forme*, de *direction* ou d'*orientation*.

Il restera donc à démontrer que le signe  $=$  est employé habituellement pour exprimer la superposabilité et non les autres relations, car la superposabilité a des propriétés qui ne sont pas communes aux autres relations que nous venons de considérer. Nous ne connaissons pas ces propriétés, mais, en revanche, nous pouvons faire observer qu'en mathématique le signe  $=$  est employé pour exprimer une relation qui a toutes les propriétés de la superposabilité (les propriétés) (1) et une autre encore que la superposabilité ne possède pas. Il en est ainsi, par exemple, en Analyse <sup>(2)</sup> où pour les nombres  $x$  et  $y$  la relation  $x = y$  est réflexive, symétrique, transitive et, de plus, est telle que toute propriété analytique de  $x$  <sup>(3)</sup> est aussi une propriété analytique de  $y$ . Or en Géométrie si la figure  $x$  est superposable à la

(1) Dans les plus récents traités on admet, par définition, qu'une droite est parallèle à elle-même.

(2) Sans parler de la Physique, où on a la même propriété pour la *température*, la *masse*, .....

(3)  $x$  est un nombre *positif, négatif, complexe d'ordre n*;  $x$  est une fonction *continue, intégrable, limitée*.

figure  $y$ , toutes les propriétés géométriques de  $x$  ne sont pas, en général, propriétés de  $y$  (les propriétés de position).

Nous pouvons observer, sous une forme plus générale, qu'en plusieurs cas, lorsque nous disons que  $x = y$ , nous admettons aussi que,  $u$  étant une classe contenant  $x$ ,  $u$  contient aussi  $y$  : or, ce fait n'a pas lieu pour toutes les relations qui satisfont aux conditions (1); car, par exemple, si  $x$  est équivalent à  $y$ ,  $x$  étant un triangle, cela n'entraîne point nécessairement que  $y$  soit un triangle. Sous cette dernière forme le signe  $=$  a la signification qu'on donne d'habitude à la phrase *est identique*; et il est bon d'observer que pour toute relation (1) on obtient l'identité pour des éléments qui sont fonctions des éléments considérés; par exemple, la figure  $x$  est *équivalente* à  $y$  exprime que l'*extension* (*longueur, aire, volume*) de  $x$  est *identique* à l'extension de  $y$ ;  $x$  est *semblable* à  $y$  exprime que la *forme* de  $x$  est *identique* à la forme de  $y$ ; la droite  $x$  est *parallèle* à la droite  $y$  exprime que la *direction* de  $x$  est *identique* à la direction de  $y$ .

2. De ce que nous venons de dire il résulte qu'il convient de donner au signe  $=$  et à la dénomination *est égal à* une signification scientifique fixe et absolue, et d'exprimer toute autre relation (1) par des signes de forme différente du symbole  $=$ .

Dans le *Formulaire de Mathématiques* (t. II, § 1, prop. 80) l'égalité (ou identité) est définie de la manière suivante :

**DÉFINITION.** — *Pour que l'objet  $x$  soit égal à l'objet  $y$ , il faut et il suffit que toute classe qui contient l'objet  $x$  contienne aussi l'objet  $y$ .*

Dans ce qui va suivre nous admettons établie, une fois pour toutes, cette définition, dont la signification exacte dépend des propriétés qui dans le *Formulaire de Mathématiques* (t. II, § 1) sont attribuées au mot *classe* et aux éléments fondamentaux de la logique générale. Nous ne rappellerons pas ces propriétés; le lecteur les trouvera au *Formulaire* cité <sup>(1)</sup>.

Les traités ordinaires de mathématiques élémentaires donnent la définition de l'égalité en disant que  $x = y$  lorsque  $x$  peut être substitué à  $y$  en tous les cas. Cette définition est une transfor-

(1) Pour les différentes significations que les logiciens donnent au mot *classe*, voir *Revue de Mathématiques*, dernier fascicule de 1898.

mation de celle de LEIBNIZ, *Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate*, laquelle, comme d'ordinaire, n'explique pas la signification exacte du mot *substitui*. La définition du *Formulaire*, que nous venons de rappeler, peut être, si l'on veut, considérée comme la traduction en termes dont les lois logiques sont fixées, de la définition de Leibniz. Elle se réduit à la forme suivante :  $x = y$  lorsque toute propriété de  $x$  est une propriété de  $y$ , si à la relation  $x$  est un élément de la classe  $u$  on donne la signification :  $x$  jouit d'une propriété exprimée par la classe  $u$  <sup>(1)</sup>.

De la définition générale de l'égalité résultent les propriétés suivantes <sup>(2)</sup> :

$x = x$  (propriété réflexive de l'égalité).

Si  $x = y$  alors  $y = x$  (propriété symétrique de l'égalité).

Si  $x = y$  et si  $y = z$  alors  $x = z$  (propriété transitive de l'égalité).

Si  $u, v$  sont des classes et  $u = v$  alors tout  $u$  est  $v$  et tout  $v$  est  $u$  <sup>(3)</sup>.

En toute correspondance univoque entre les éléments de la classe  $u$  et les éléments de la classe  $v$  à des objets égaux de  $u$  correspondent des objets égaux de  $v$ .

La condition nécessaire et suffisante d'égalité entre le couple  $(x, y)$  et le couple  $(a, b)$  est  $x = a$  et  $y = b$ .

Nous donnons la démonstration complète des propriétés suivantes (non encore énoncées par d'autres).

3. Nous avons fait observer, dans le n° 1, que si  $x, y$  sont des nombres et si  $x = y$ , alors toute propriété analytique de  $x$  est aussi une propriété analytique de  $y$ . Mais la définition générale

<sup>(1)</sup> Par exemple la phrase : le nombre  $x$  a la propriété d'être plus petit que 1, signifie «  $x$  est un des éléments de la classe des nombres plus petits que 1 » ; la phrase « la figure géométrique  $x$  a la propriété d'être un triangle », signifie «  $x$  est un triangle » et le mot triangle est un nom commun, est une classe de figures géométriques.

<sup>(2)</sup> *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 1, propositions 81, 82, 83, 84, 85, 503, 86.

<sup>(3)</sup> L'inverse de cette propriété est vrai ou faux selon qu'une classe est considérée comme dépendant seulement de ses éléments, ou est considérée comme dépendant aussi de la *position*, de l'*ordre*... de ses éléments. Pour donner au mot classe la première signification, il faut poser comme *proposition primitive* : Si tout  $u$  est  $v$  et si tout  $v$  est  $u$ , alors  $u = v$ . Dans le *Formulaire* on donne pour définition la signification de  $u = v$ . (T. II, § 1, prop. 16 et p. 39.)

d'égalité, que nous venons d'établir, ne se limite pas aux propriétés analytiques et comprend un champ plus grand de propriétés. De même,  $x, y$  étant deux points, pour établir que  $x = y$ , est-il suffisant de prouver que toute figure (classe de points) qui contient  $x$  contient aussi  $y$ , ou bien devons-nous recourir à toute classe  $u$  pour lesquels nous ne connaissons pas la signification de la phrase *le point  $x$  est un élément de  $u$* ? Le théorème suivant va résoudre la question.

THÉORÈME I. — *Si  $u$  est une classe et si  $x, y$  sont éléments de  $u$ , alors la condition nécessaire et suffisante d'égalité pour  $x$  et  $y$  ( $x = y$ ) est que : toute classe formée avec les  $u$  et contenant  $x$  contienne aussi  $y$ .*

La condition est *nécessaire*; cela résulte immédiatement de la définition d'égalité. Si la condition est vérifiée et si  $a$  est une classe contenant  $x$ , alors la classe commune à  $u$  et  $a$  est une classe formée par les  $u$  et par suite elle contient  $y$ ; mais si la classe commune à  $u$  et  $a$  contient  $y$ ,  $a$  contient aussi  $y$ . Par conséquent si la condition est vérifiée, toute classe qui contient  $x$  contient aussi  $y$  et, par la définition d'égalité,  $x = y$ , c'est-à-dire que la condition est *suffisante*.

Donc pour vérifier la condition  $x = y$ , quand, par exemple,  $x, y$  sont des points, il faut et il suffit de vérifier que toute figure (classe de points) qui contient  $x$  contient aussi  $y$ ; et par les propriétés géométriques ordinaires on aura aussi  $x = y$  lorsque toute droite ou tout plan qui passe par  $x$  passe aussi par  $y$ . En conséquence la relation  $x = y$  signifie :  *$x$  coïncide avec  $y$*  comme on dit dans le langage géométrique ordinaire.

4. De la définition générale d'égalité résulte la condition d'égalité pour deux correspondances, dont nous donnerons d'importantes applications au n° 6. — Mais avant d'aborder cette question il est nécessaire d'établir exactement certaines propriétés de correspondances univoques.

Si  $x$  étant un élément quelconque d'une classe  $u$ , nous indiquons par la notation  $fx$ , — où  $f$  est un signe fixe (comme *sin*, *log*...), — un élément bien déterminé d'une classe  $v$ , alors  $f$  indique une *loi* en vertu de laquelle, étant donné un élément quelconque de  $u$ , il en résulte pour  $v$  un élément et un seul. Cette

loi, c'est-à-dire son signe  $f$ , est dite *correspondance univoque* entre les  $u$  et les  $v$  : on dit encore que les éléments  $fx$  sont des  $v$  fonctions des  $u$ . On pose quelquefois le signe  $f$  à la droite de la lettre variable comme, par exemple, pour le signe  $!$ , et pour les signes composés  $+a$ ,  $\times a$ , où  $a$  est un nombre, qui, placés à la droite d'un nombre quelconque  $b$ , produisent les nombres, bien déterminés  $b+a$ ,  $b\times a$ .

Si  $f$  est une correspondance univoque entre les  $u$  et les  $v$ , et si  $w$  est une classe formée avec les  $u$ , alors  $f$  est aussi une correspondance entre les  $w$  et les  $v$ , car  $x$  étant un élément quelconque de  $w$ ,  $x$  est un élément de  $u$  et par conséquent  $fx$  est un élément bien déterminé de  $v$  <sup>(1)</sup>.

Cela posé, nous avons le

THÉORÈME II. — Si  $f$ ,  $h$  sont des correspondances, alors pour que  $f = h$ , il faut et il suffit que : quel que soit l'élément  $x$ , tel que la notation  $fx$  ait reçu une signification, on ait  $fx = hx$ .

La condition est nécessaire; cela résulte immédiatement de la définition d'égalité. — Si la condition est vérifiée et si  $a$  est une classe de correspondances et  $f$  un élément de  $a$ , alors  $f$  est une correspondance entre les éléments d'une classe  $u$  et les éléments d'une classe  $v$ ; mais ayant  $fx = hx$ ,  $h$  est aussi une correspondance entre les  $u$  et les  $v$ , c'est-à-dire que  $h$  est un élément de  $a$ . Donc toute classe  $a$  de correspondances qui contient  $f$  contient aussi  $h$ , et d'après le théorème I la condition est suffisante.

5. La fonction *sin* qui est une correspondance, par exemple, entre les nombres de  $-\pi$  à  $\pi$  et les nombres de  $-1$  à  $1$ , est aussi une correspondance entre les nombres de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$  et les nombres de  $-1$  à  $1$ ; mais dans le premier intervalle la fonction *sin* n'est pas toujours croissante ou décroissante et dans le deuxième intervalle elle est toujours croissante. Une fonction analytique quelconque peut ne point être ou continue, ou limitée, ou intégrable dans un intervalle donné, et être continue, limitée, intégrable dans un intervalle contenu dans le précédent.

En général,  $f$  étant une correspondance entre les  $u$  et les  $v$ , le signe  $f$  n'indique pas, à lui seul, toutes les propriétés de la cor-

(1) *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 1, prop. 500, 501, 505.

respondance, car celles qui dépendent de la partie de la classe  $u$  à laquelle nous entendons appliquer la loi  $f$  restent exceptées. Le signe composé  $f_u$  nous indiquera dans ce qui va suivre, *la loi  $f$  appliquée à tous les éléments de  $u$* . Si  $w$  est une classe formée avec les  $u$ , la notation  $f_w$  vient de recevoir signification, car  $f$  est une correspondance entre les  $w$  et les  $v$ , et par conséquent  $f_w$  indique la loi  $f$  appliquée à tous les éléments de  $w$ .

Les fonctions  $f_u, f_w$  peuvent avoir des propriétés bien différentes entre elles ; mais si  $x$  est un élément quelconque de  $w$ , le correspondant de  $x$  en vertu de la loi  $f_u$  ou de la loi  $f_w$  est toujours  $fx$ , et si nous indiquons par  $f_w x, f_w x$ , le correspondant de  $x$  en vertu des lois  $f_u$  et  $f_w$ , nous entendons avoir pour ces lois

$$f_u x = f_w x = fx$$

quel que soit l'élément  $x$  de  $w$ .

Cela posé, nous pouvons démontrer le

THÉORÈME III. — *Si  $f, h$  sont des correspondances entre les  $u$  et les  $v$ , alors la condition nécessaire et suffisante pour avoir  $f_u = h_u$  est que : quel que soit l'élément  $x$  de  $u$ , on ait  $fx = hx$  (ou si l'on veut  $f_u x = h_u x$ ).*

Quel que soit l'élément  $x$  de  $u$ ,  $h_u$  est une des correspondances  $\varphi_u$  entre les  $u$  et les  $v$  telles que  $\varphi x = hx$ ; alors si  $f_u = h_u$ , d'après la définition d'égalité nous savons que  $f_u$  est aussi l'une des correspondances  $\varphi_u$  entre les  $u$  et les  $v$  telles que  $\varphi x = hx$ , c'est-à-dire  $fx = hx$ . La condition est donc *nécessaire*. Si la condition est vérifiée et si  $f_u$  appartient à une classe quelconque de correspondances entre les  $u$  et les  $v$  <sup>(1)</sup>, alors  $h_u$  appartient à la même classe, car, quel que soit l' $x$  de  $u$ ,  $fx = hx$ . Donc par le théorème I la condition est *suffisante*.

L'égalité de deux correspondances  $f, h$  peut subsister pour un intervalle et non pour un autre. Par exemple :  $x$  étant un nombre réel, écrivons, suivant Legendre,  $Ex$  au lieu de *partie entière de  $x$* ;  $x$  étant un objet quelconque posons  $\omega x = x$ , c'est-à-dire

(1) Dire que  $\psi$  est une classe de correspondances entre les  $u$  et les  $v$  signifie que les correspondances de cette classe appliquées à un élément quelconque  $x$  de la classe  $u$  produisent une classe déterminée de  $v$  : cela revient à dire que  $\psi$  est une correspondance entre les  $u$  et cette classe de  $v$ .

indiquons par  $\omega$  la correspondance qu'on peut appeler *identité* ; écrivons  $n$  au lieu de *nombre entier* et  $q$  au lieu de *nombre réel* ; on a d'après le théorème III

$$E_n = \omega_n, \quad E_q \neq \omega_q$$

et d'après le théorème II  $E \neq \omega$ , car si  $x$  est un nombre entier  $E.x = \omega.x$ , mais, par exemple,  $E\sqrt{2} \neq \omega\sqrt{2}$ . Cela justifie l'emploi de la notation  $f_u$  à laquelle il serait nécessaire de recourir, dans la pratique, toutes les fois que nous avons besoin de considérer des propriétés de la loi  $f$  qui dépendent de la classe  $u$  <sup>(1)</sup>.

Il faut bien remarquer que le signe composé  $f_u$  n'est pas le couple formé par les deux éléments  $f$  et  $u$ . En effet, par ce que nous venons de dire au n<sup>o</sup> 2 si  $f_u$  est le couple  $(f, u)$  l'égalité  $f_u = h_u$  entraîne l'égalité  $f = h$  : or pour les deux signes  $E, \omega$  nous avons  $E_n = \omega_n$  et  $E \neq \omega$ .

6. Maintenant, nous allons appliquer le théorème III à l'introduction dans l'analyse des nombres rationnels et irrationnels.

Supposons connue la théorie des nombres entiers et des grandeurs <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Par exemple lorsque de la relation  $\overline{\sin} x = y$  nous déduisons la relation  $x = \overline{\text{arc sin}} y$  ou  $x = \overline{\sin^{-1}} y$ , ou  $x = \overline{\sin} y$ , nous sous-entendons faire varier  $x$  de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$ , car dans le cas contraire  $\overline{\text{arc sin}} y$  n'est pas un nombre, mais une classe de nombres qui dépend toujours de l'intervalle de variation de  $x$ .

<sup>(2)</sup> Pour les nombres entiers voir le *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 2, et pour les grandeurs le même *Formulaire*, t. I, partie IV. Je crois utile de rappeler ici les propositions fondamentales de la théorie des grandeurs.

Nous disons que  $u$  est une *classe homogène de grandeurs*, lorsque  $u$  étant une classe et  $a, b$  étant deux éléments quelconques de  $u$ , on peut définir une opération dont le résultat indiqué par  $a + b$ , est tel que  $a + b$  est un élément bien déterminé de  $u$ . Les grandeurs géométriques *longueurs, aires, volumes*, sont des classes homogènes des grandeurs. Les longueurs des côtés d'un polygone forment un classe de grandeurs, mais pas une classe homogène, car la somme de deux côtés peut ne point être un côté du même polygone.

Soient  $a, b, c, \dots$  des éléments d'une classe homogène de grandeurs. Nous disons que  $a > b$  quand  $a$  est la somme de  $b$  avec une grandeur, et nous disons que  $a < b$  lorsque  $b > a$ . Indiquons par la notation  $\theta a$  la classe formée avec les grandeurs plus petites que  $a$  ;  $m$  étant un nombre entier non nul, posons  $1a = a$  et  $(m + 1)a = ma + a$ , c'est-à-dire indiquons par  $(m + 1)a$  la somme de  $m + 1$  grandeurs égales à  $a$ .

Les propriétés fondamentales de la classe  $u$  *suffisantes* pour déduire les propriétés ordinaires, par exemple, des grandeurs géométriques, sont les suivantes :

I.  $a + b = b + a$  (propriété *commutative* de la somme, employée par EUCLIDE, par exemple dans la démonstration de la prop. XIII du Livre I).

II.  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (propriété *associative* de la somme).

NOMBRES RATIONNELS. — Soient  $m, n, p, q$  des nombres entiers <sup>(1)</sup> non nuls et soit  $a$  un élément quelconque d'une classe homogène  $g$  de grandeurs. En suivant l'usage commun, nous indiquons par la notation  $\frac{m}{n}a$  la grandeur de  $g$ , bien déterminée, qu'on obtient en multipliant par  $m$  la grandeur  $x$  telle que  $nx = a$ . D'après le troisième théorème, la correspondance  $\left(\frac{m}{n}\right)_g$  est univoquement déterminée, c'est-à-dire que  $\left(\frac{m}{n}\right)_g$  est égal à l'unique correspondance  $f_g$  parmi les  $g$  et les  $g$  telles que, quel que soit l'élément  $a$  de  $g$ ,  $n(fa) = ma$ .

Du même théorème on déduit que la condition  $\left(\frac{m}{n}\right)_g = \left(\frac{p}{q}\right)_g$  équivaut à la condition  $\frac{m}{n}a = \frac{p}{q}a$ , quel que soit l'élément  $a$  de  $g$ ; mais il est bien aisé de reconnaître par la théorie des grandeurs que cette dernière condition équivaut à  $mq = np$ .

III.  $a$  n'est pas la somme de  $a$  avec un élément de  $u$  (EUCLIDE. Axiome IX, livre I) (reste par conséquent exclue la grandeur nulle).

IV. On a  $a = b$  ou  $a > b$  ou  $a < b$ . (EUCLIDE dans la démonstration, par exemple, de la prop. VI, livre I.)

V. Quel que soit l'élément  $a$  de  $u$ , la classe  $\theta u$  n'est pas nulle (c'est-à-dire qu'il existe des grandeurs plus petites que  $a$ ).

VI. Si  $v$  est une classe formée avec les  $u$ , qui contient des éléments, et s'il existe des  $u$  qui n'appartiennent point à  $\theta v$ , alors il existe un élément  $x$  de  $u$ , tel que  $\theta x = \theta v$ . (DEDEKIND, *Postulat de la continuité*.)

De ces propositions on déduit :

VI<sub>1</sub>. Il existe un multiple de  $a$  plus grand que  $b$  (postulat d'ARCHIMÈDE).

VI<sub>2</sub>.  $n$  étant un nombre entier non nul il existe un élément  $x$  de  $u$  tel que  $nx = a$  (élément qu'on indique habituellement par la notation  $\frac{1}{n}a$ ).

Par l'indépendance des propositions I-VI nous avons les suivants :

Si  $a, b$  sont des points et si  $a + b$  est le milieu du segment  $ab$ , alors la prop. I est vérifiée et la prop. II n'est point vérifiée.

Si  $u$  est la classe des nombres le zéro compris, alors la prop. III n'est pas vérifiée, et les prop. I, II sont vérifiées.

Si  $u$  est la classe des nombres plus grands que 10, alors la prop. IV n'est pas vraie et les prop. I, II, III sont vérifiées.

Si  $u$  est la classe des nombres entiers (positifs), le zéro exclu, la prop. V n'est pas vérifiée et les prop. I, II, III, IV sont vérifiées.

Si  $u$  est la classe des nombres rationnels, les propositions I, II, III, IV, V sont vérifiées, mais la prop. VI n'est pas vérifiée.

On en déduit qu'une quelconque des propositions II-VI n'est point la conséquence des propositions qui la précèdent. Il serait fort important de démontrer que chacune des propositions I-VI n'est pas une conséquence de toutes les autres, c'est-à-dire que les propositions I-VI sont nécessaires.

<sup>(1)</sup> Des nombres sans *signe*, comme sont considérés ceux de l'Arithmétique et pas des nombres avec le signe  $+$  ou  $-$  (positifs ou négatifs) comme sont considérés ceux de l'Algèbre. (Pour ces derniers nombres, voir la remarque de ce numéro.)

Nous pouvons dire que  $\left(\frac{m}{n}\right)_g$  est un *nombre rationnel* ; c'est précisément l'élément qui, dans l'usage commun, est indiqué, tout simplement, par la notation  $\frac{m}{n}$  <sup>(1)</sup>. Si nous écrivons  $\frac{m}{n}$  au lieu de  $\left(\frac{m}{n}\right)_g$  la condition  $\left(\frac{m}{n}\right)_g = \left(\frac{p}{q}\right)_g$  reste exprimée par  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$  et alors, en vertu des théorèmes deuxième et troisième, nous convenons implicitement de faire toujours usage du signe composé  $\frac{m}{n}$  de manière que, quelle que soit la classe  $u$  aux éléments de laquelle nous l'appliquons, la condition  $\left(\frac{m}{n}\right)_u = \left(\frac{p}{q}\right)_u$  soit équivalente à la condition  $mq = np$  : cela est fort utile à faire pour la *conservation des propriétés formales*. D'une autre manière nous pouvons convenir d'écrire  $\frac{m}{n}$  au lieu de  $\left(\frac{m}{n}\right)_g$  en *sous-entendant simplement l'indice g* : nous faisons réellement cela dans le langage commun où, par exemple, le mot exprimé par la notation  $\frac{2}{3}$  ne paraît jamais isolé, mais *précède toujours* une grandeur qui est explicitement énoncée ou sous-entendue <sup>(2)</sup>.

NOMBRES IRRATIONNELS. — Soient  $u, v$  deux classes de rationnels qui contiennent effectivement des éléments, ces éléments étant plus petits qu'un rationnel donné. Par la notation  $ua$  nous indiquons la classe dont les éléments sont les produits de la grandeur  $a$  pour les éléments de  $u$ . Pour le postulat de la continuité il existe une grandeur  $x$  telle que la classe des grandeurs plus petites que  $x$  soit égale à la classe des grandeurs qui sont plus petites que quelques-uns des éléments de  $ua$  : nous pouvons exprimer ceci en écrivant  $\theta x = \theta (ua)$  où  $\theta$  signifie *plus petit que*. La grandeur  $x$  que nous venons de considérer est univoquement déterminée : nous l'appelons *limite supérieure des  $ua$*  et nous l'indiquons par la notation  $l'(ua)$ .

(1) L'idée d'introduire les rationnels comme des opérations (comme on fait dans le langage commun) est expliquée exactement pour la première fois dans le *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 2, où la condition d'égalité est donnée par définition.

(2) D'après le Théorème III on a  $\left(\frac{m}{1}\right)_g = (m)_g$  et par conséquent les nombres entiers qui en résultent sont compris dans les nombres rationnels.

Si nous posons, par définition

$$(\ell'u)a = \ell'(ua)$$

il s'ensuit que le signe composé  $\ell'u$ , qu'on peut lire *limite supérieure des u*, est une correspondance entre les  $g$  et les  $g$ , et il résulte du troisième théorème que :  $(\ell'u)_g$  est égal à l'unique correspondance  $\ell_g$  parmi les  $g$  et les  $g$ , telle que, quel que soit l'élément  $a$  de  $g$ ,  $\ell'a = \ell'(ua)$ . Pour certaines classes  $u$  (comme par exemple pour la classe dont les éléments sont  $\frac{2}{10}, \frac{22}{100}, \frac{222}{1000}, \dots$ ) la correspondance  $(\ell'u)_g$  est une rationnelle, et pour d'autres classes elle est un élément nouveau que, en suivant l'usage commun, nous pouvons appeler *nombre irrationnel* (par exemple  $u$  étant les nombres rationnels dont le carré est plus petit que 2).

Par le troisième théorème on déduit que la condition  $(\ell'u)_g = (\ell'v)_g$  équivaut, quelle que ce soit la grandeur  $a$ , à la condition  $\ell'(ua) = \ell'(va)$ , condition qui équivaut à  $\theta u = \theta v$ . Donc, en répétant les précédentes considérations pour écrire  $\ell'u$  au lieu de  $(\ell'u)_g$  nous voyons que :

La condition  $\ell'u = \ell'v$  équivaut à la condition  $\theta u = \theta v$ . Et si  $m$  est un rationnel :

La condition  $m = \ell'u$  équivaut à la condition  $\theta m = \theta u$  <sup>(1)</sup>.

*Remarque.* — Les nombres rationnels et irrationnels étant définis comme nous venons de le faire, les propriétés

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} a \pm \frac{p}{n} a &= \frac{m \pm p}{n} a, & \frac{m}{n} \left( \frac{p}{q} a \right) &= \frac{mp}{nq} a \\ \ell'(ua) + \ell'(va) &= \ell'((u+v)a) & \ell'(u(va)) &= \ell'((u \times v)a) \end{aligned}$$

donnent aisément les définitions de sommes et de produits de deux nombres réels, entiers, rationnels, irrationnels quelconques.

Les nombres *positifs* et *négatifs* de l'Algèbre peuvent être introduits bien aisément.

Si  $a$  est un nombre,  $\dot{+} a$  est un signe qui placé après un nombre produit un nombre, et  $- a$  est un signe qui placé après

<sup>(1)</sup> Voir GENOCCHI-PEANO, *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung* (Leipzig, 1898), où les conditions que nous venons de démontrer sont données par définition.

un nombre égal ou plus grand que  $a$ , produit un nombre. En répétant les considérations précédentes,  $+a$  et  $-a$  sont des correspondances par lesquelles on démontre que :

*La condition  $+a = +b$  équivaut à la condition  $a = b$ .*

*La condition  $-a = -b$  équivaut à la condition  $a = b$ .*

7. — Dans les numéros précédents, nous avons défini le nombre rationnel ou irrationnel, ou positif ou négatif  $x$  en posant  $x$  égal (identique) à un groupement connu  $a$  de signes connus ; c'est-à-dire que nous avons *défini nominale*ment l'élément  $x$ . Par exemple on définit nominale<sup>ment</sup> pour tout le monde le *triangle*, la *sphère*, les *nombre*s premiers..... Mais la possibilité de définir nominale<sup>ment</sup> l'élément  $x$  dépend de celle d'avoir à notre disposition des éléments déjà connus avec lesquels on puisse former le groupement  $a$  que nous posons identique au nouvel élément  $x$  ; par exemple sans les éléments *correspondance* et *grandeurs* nous ne savons pas, à présent, définir nominale<sup>ment</sup> les nombres irrationnels.

Si pour l'élément  $x$ , il n'est pas possible de donner une définition nominale, alors, selon la signification usuelle du mot définir, l'élément  $x$  sera défini (sera introduit dans la science) lorsque nous donnerons une ou plusieurs relations, entre  $x$  et des éléments déjà connus, tels que par elles on puisse savoir si l'objet donné  $y$  est ou non égal (identique) à  $x$ . Cette méthode est applicable en vertu de la définition générale d'égalité, et des propriétés déduites par elle, aux éléments *nombre*s cardinaux et ordinaux de M. G. Cantor, *directions*, *orientations*, *longueurs*, *aires*, *volumes*, *masse*, *température*...

Voici comme on peut procéder.

Lorsque nous disons, par exemple, que  $x$  est une longueur, nous entendons dire que  $x$  est un *élément simple* <sup>(1)</sup> qui est fonction (par exemple) d'un segment, et cette fonction est commune à tous les segments superposables entre eux. Si  $a$  est un segment, la fonction considérée de  $a$  est indiquée par la phrase *longueur de a*. Donc, tandis que le mot *longueur* est un NOM COMMUN, une CLASSE, le mot *longueur de* est une CORRESPONDANCE entre les

(1) C'est-à-dire est un élément tel que la phrase *y est un x* n'a pas de signification, comme si  $x$  est un nombre, un signe de fonction.

*segments* et la classe *longueur*. De même, *nombre cardinal* indique une classe, *nombre cardinal des* indique une correspondance entre les *classes* et des éléments simples qui sont les éléments de la classe *nombre cardinal*.

En général,  $a$  étant une classe connue, nous considérons une classe  $u$  dont les éléments sont fonctions des éléments de  $a$  et nous obtenons le signe de cette fonction en faisant suivre du mot *de* ou *des* le nom de la classe  $u$ . Si nous indiquons par  $u'$  ce signe de fonction, la classe  $u$  reste définie nominalelement en disant : *dire que  $x$  appartient à la classe  $u$  équivaut à dire qu'il existe un élément  $y$  de  $a$  tel que  $x$  est identique à  $u'y$  (1)*. Il en résulte que si la fonction  $u'$  est définie, alors la classe  $u$  est introduite dans la science, car nous pouvons affirmer ou nier la relation  $z = u'y$ .

Considérons, par exemple, les *nombre cardinal* de M. G. Cantor (2) pour lesquels il est bien connu que :

(a) *Si  $u, v$  sont des classes, pour que le nombre cardinal des  $u$  soit égal au nombre cardinal des  $v$ , il faut et il suffit que la classe  $u$  soit semblable à la classe  $v$  (c'est-à-dire que  $u$  peut être mis en correspondance univoque et réciproque avec  $v$ )*.

Cela posé, nous pouvons introduire dans la science la correspondance *nombre cardinal des* en posant la définition suivante.

DÉFINITION. — NOMBRE CARDINAL DES est une des correspondances  $f$  entre des classes et des éléments simples, telles que, quelle que soit la classe  $u$ , les classes  $v$  pour lesquelles  $fv = fu$ , sont toutes les classes semblables à  $u$  et les seules.

Le théorème (a) résulte immédiatement de cette définition, et par conséquent nous pouvons toujours établir si l'élément  $y$  est égal ou non au nombre cardinal des  $u$ .

D'une façon analogue on introduit les éléments *direction, longueur...*, que nous venons de citer (3).

(1) Voir à ce propos l'Introduction au *Formulaire de Mathématiques* et les tomes I et II du *Formulaire de Mathématiques*.

(2) *Beitrag zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Ann. B 47, Rivista di matematica a 1875.

(3) Pour les nombres cardinaux et ordinaux voir C. BURALI-FORTI, *Le Classi finite, Sopra un teorema del Sig. G. Cantor* (Atti Acc. Torino, 1896), *Una questione sui numeri transfiniti* (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1897). Dans ces mémoires les éléments abstraits sont introduits en définissant pour eux l'égalité, en

REMARQUE. — M. Cantor définit le *nombre cardinal des*  $u$  en disant : *Nous appelons puissance, ou nombre cardinal, des*  $u$  *l'idée générale que, au moyen de notre active faculté de penser, on déduit de la classe*  $u$  *en faisant abstraction de la nature et de l'ordre des éléments de*  $u$ . Le *faire abstraction* paraît ici comme une opération logique ; mais quelles sont les lois auxquelles elle satisfait ? Dans le cas particulier que nous considérons, les lois dont nous venons de parler sont fixées par notre définition.

En général la forme de définition que nous proposons, fixe, au moyen du mot égal, la signification de la phrase *élément abstrait fonction (abstraite) d'un élément connu*, qui par plusieurs auteurs et en plusieurs circonstances est employée sans la définir <sup>(1)</sup>.

Dans notre définition de *nombre cardinal*, nous avons dit que *nombre cardinal des* est UNE DES CORRESPONDANCES  $f$ ..... : pouvons-nous dire que *nombre cardinal des* est LA CORRESPONDANCE  $f$ .....? c'est-à-dire pouvons-nous admettre que la classe des correspondances  $f$  considérées contienne un seul élément ? Non, car sans faire varier les conditions pour  $f$  nous pouvons faire varier l'élément simple qui correspond à  $u$ . Par exemple en vertu des conventions ordinaires pour les nombres positifs et négatifs nous savons que  $+$  et  $-$  sont des correspondances  $f$  entre les nombres réels et des éléments simples, tels que, quel que soit le nombre  $x$ , les nombres réels  $y$  pour lesquels  $fy = fx$  sont tous et seulement les nombres réels égaux à  $x$  ; or si  $a$  est un nombre réel non nul  $+a$  n'est pas égal à  $-a$ .

Les deux formes de définition que nous venons d'exposer aux

suivant la méthode employée par EUCLIDE pour introduire les *rappports* (liv. V, Def. V) et qu'on trouve analysée logiquement dans *l'Introduction au Formulaire de Mathématiques*. Je préfère la méthode que je viens de suivre dans cet ouvrage parce qu'il n'est plus nécessaire de définir l'égalité de deux des éléments abstraits considérés. Je supprime aussi le mot *abstrait*, car je ne connais pas encore une distinction logique bien établie entre *élément abstrait* et *élément concret*.

<sup>(1)</sup> Dans le *Formulaire de Mathématiques* les éléments abstraits  $x, y$ ... d'une classe sont introduits en définissant nominalement l'égalité  $x = y$  (par ex. t. II, § 2, propositions 030.1, 061.1, 210.1, ...). — De plus, en général, dans le *Formulaire* l'égalité est définie pour tous les éléments primitifs ou dérivés. Il faut bien observer que cela n'est point en contradiction avec la définition générale d'égalité donnée aux prop. 80 du t. II, § 1, car le *Formulaire* est en même temps un recueil de formules et de toutes les théories ; or il est aussi logique de définir en tous les cas l'égalité que de la définir une fois pour toutes, et de déduire les conditions d'égalité dans les divers cas particuliers.

n<sup>os</sup> 6 et 7 sont suffisantes pour introduire dans la science tous les éléments  $x$  qui peuvent être mis en relation avec des éléments déjà connus  $a, b, \dots$  c'est-à-dire les éléments dérivés. Mais on arrivera toujours à des éléments que nous ne savons point mettre en relation avec des éléments déjà connus et pour ces éléments (éléments primitifs) la méthode qui les introduit dans la science est celle des *postulats*, méthode qui est bien connue <sup>(1)</sup> et au sujet de laquelle nous n'avons pas d'observations à faire. La méthode des postulats reflète l'origine tout à fait expérimentale de la Mathématique <sup>(2)</sup> qui, jusque dans ses principes a emprunté à l'expérience un minimum de propriétés (postulats) desquelles toutes les autres peuvent être déduites logiquement <sup>(3)</sup>. A présent la Mathématique tend toujours plus à se délivrer des liens avec le monde extérieur, et à former de chacune de ses parties un système logique déductif complet, dont les postulats expriment des propriétés susceptibles de plusieurs interprétations, vérifiées ou non par l'expérience. De cette tendance résulte un réel progrès logique d'organisation et d'exposition, à condition que la didactique n'oublie pas de rappeler que les théories les plus importantes de la Mathématique sont dues à la résolution des

<sup>(1)</sup> DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* 1888.

PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*.

G. PEANO, *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Torino, Bocca, 1889. — *Principi di geometria logicamente esposti*, 1889. *Formulaire de Mathématiques*, t. II, §§ 1, 2.

MARIO PIERI, *I principi della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*. Mem. Acc. Torino, 1898.

C. BURALI FORTI, *Teoria delle grandezze*, Formulaire de Mathématiques, t. I, part. IV. *Les postulats pour la Géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky*, Mathematiker-Kongress, Zurich, 1898.

<sup>(2)</sup> Comme fort justement l'observe M. Laisant (*La Mathématique*, Paris, G. Carré et C. Naud, 1898).

<sup>(3)</sup> L'idée de *temps* introduite aussi par NEWTON comme primitive peut être définie nominalement. Le *mouvement géométrique* peut être défini comme une correspondance spéciale entre points et points (voir la note précédente); une classe  $m$  de mouvements géométriques appliqués à un point  $a$  produit une classe de points  $ma$ : par les postulats géométriques on déduira si les éléments  $ma$  sont, suivant Grassmann, les positions d'un point P fonction continue d'une ou de deux ou de trois variables numériques: une classe  $m$  de mouvements géométriques satisfaisant à la première condition est le *mouvement de la Mécanique*; un cas particulier de ce mouvement peut être pris comme *mouvement unitaire*, c'est-à-dire comme *temps*, qui reste ainsi introduit géométriquement sans avoir recours à des points fixes d'une manière absolue.

questions de Géométrie, de Mécanique et de Physique et non à des abstractions qui n'ont rien à faire avec le monde extérieur et l'expérience répétée. C. BURALI-FORTI (Turin).

---

## SUR L'ÉCONOMIE DE LA PENSÉE

DANS LES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1)

---

Je n'aborderai pas ici ce problème, d'une grande actualité, qui consiste à examiner dans quelle mesure l'abstraction d'une part, et l'intuition d'autre part, doivent trouver place à l'université dans l'enseignement des éléments d'analyse. Je me bornerai à observer qu'on parviendra aux résultats les plus favorables si, dans certaines limites, chaque professeur a la liberté de suivre sa propre initiative.

Par contre, je suis persuadé que — sauf dans des cas exceptionnels où l'on se trouve en présence d'élèves particulièrement doués — l'enseignement universitaire ne peut offrir les garanties d'un succès certain et continu, que s'il est accompagné d'une revision systématique des mathématiques élémentaires. Cette revision doit porter principalement sur l'arithmétique, l'algèbre et la trigonométrie. Il suffirait, à la rigueur, d'y consacrer une heure par semaine. Ces leçons rendraient certainement de grands services. Ainsi, il est rare que, parmi les jeunes gens venant d'accomplir leurs études secondaires, il s'en trouve un qui ait une idée nette de la relation  $a^0 = 1$ , à laquelle on peut attribuer deux significations entièrement différentes, l'une se rattachant simplement à la notation, l'autre provenant du cas limite envisagé dans la théorie des puissances.

D'un autre côté les calculateurs, tels que les astronomes, se plaignent de l'incapacité des jeunes étudiants pour tout ce qui

---

(1) Cette note forme une suite toute naturelle à l'article que nous avons publié sur *l'enseignement de la Trigonométrie* (n° 1, p. 45). Elle a été présentée au Congrès de Düsseldorf en septembre 1898 et publiée dans le tome VII du *Jahresbericht der D. M. V. M.* Fr. Meyer a bien voulu nous adresser son mémoire pour les lecteurs de *l'Enseignement mathématique*.