Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1899)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ÉCONOMIE DE LA PENSÉE DANS LES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Autor: Meyer, W. Franz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1233

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

questions de Géométrie, de Mécanique et de Physique et non à des abstractions qui n'ont rien à faire avec le monde extérieur et l'expérience répétée. C. BURALI-FORTI (Turin).

SUR L'ÉCONOMIE DE LA PENSÉE

DANS LES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES [1]

Je n'aborderai pas ici ce problème, d'une grande actualité, qui consiste à examiner dans quelle mesure l'abstraction d'une part, et l'intuition d'autre part, doivent trouver place à l'université dans l'enseignement des éléments d'analyse. Je me bornerai à observer qu'on parviendra aux résultats les plus favorables si, dans certaines limites, chaque professeur a la liberté de suivre sa propre initiative.

Par contre, je suis persuadé que — sauf dans des cas exceptionnels où l'on se trouve en présence d'élèves particulièrement doués — l'enseignement universitaire ne peut offrir les garanties d'un succès certain et continu, que s'il est accompagné d'une revision systématique des mathématiques élémentaires. Cette revision doit porter principalement sur l'arithmétique, l'algèbre et la trigonométrie. Il suffirait, à la rigueur, d'y consacrer une heure par semaine. Ces leçons rendraient certainement de grands services. Ainsi, il est rare que, parmi les jeunes gens venant d'accomplir leurs études secondaires, il s'en trouve un qui ait une idée nette de la relation $a^0 = 1$, à laquelle on peut attribuer deux significations entièrement différentes, l'une se rattachant simplement à la notation, l'autre provenant du cas limite envisagé dans la théorie des puissances.

D'un autre côté les calculateurs, tels que les astronomes, se plaignent de l'incapacité des jeunes étudiants pour tout ce qui

---

[1] Cette note forme une suite toute naturelle à l'article que nous avons publié *sur l'enseignement de la Trigonométrie* (n° 1, p. 45). Elle a été présentée au Congrès de Düsseldorf en septembre 1898 et publiée dans le tome VII du *Jahresbericht der D. M. V.* M. Fr. Meyer a bien voulu nous adresser son mémoire pour les lecteurs de *l'Enseignement mathématique*. LA DIRECTION.

concerne les calculs, même dans les problèmes trigonométriques les plus simples.

Voici encore un autre fait dont on doit tenir compte. Pendant le cours des quatre années d'études, l'étudiant en mathématiques parvient à se familiariser avec les domaines les plus difficiles et les plus délicats des sciences exactes, et cela développe chez lui un certain sentiment d'orgueil. Mais, une fois placé dans l'enseignement comme maître, il éprouve souvent une profonde répugnance à rassembler les premiers éléments qu'il a oubliés depuis bien des années ; le temps qui lui reste pour la préparation de son enseignement ne lui permet pas toujours d'approfondir le sujet : aussi le jeune maître se bornera-t-il à suivre aveuglément un manuel quelconque.

Cependant *par des revisions fréquentes des éléments on parvient non seulement à réaliser d'importantes économies dans la pensée et dans les calculs, mais encore à rattacher le sujet de plus en plus étroitement à des considérations plus élevées* [1]. C'est ce que nous nous proposons de montrer ici en nous bornant, pour le moment, à l'exemple concret de la *trigonométrie plane*. Je suppose l'élève en possession des premiers éléments de géométrie plane et d'algèbre.

Le *premier cycle* doit avoir un but essentiellement pratique afin de *conduire le plus rapidement possible aux applications*, c'est-à-dire à la résolution des triangles. On introduira le sinus, le cosinus, la tang et la cotg à l'aide du triangle rectangle. La résolution des triangles rectangles n'est qu'une simple conséquence de la définition des rapports trigonométriques et du théorème de Pythagore ; pour les calculs on admettra l'existence des log sin, log cos, ... On passera ensuite aux triangles quelconques. Leur étude trigonométrique est basée sur l'examen des triangles rectangles déterminés par les hauteurs du triangle ; elle conduit aux relations :

$$S_a \equiv b \sin\gamma - c \sin\beta = 0 \qquad \text{(principe des sinus)}, \qquad (1)$$

$$C_a \equiv b^2 + c^2 - a^2 - 2bc\cos\alpha = 0 \qquad \text{(principe des cosinus)}, \qquad (2)$$

$$P_a \equiv a - b\cos\gamma - c\cos\beta = 0 \qquad \text{(principe des projections)}. \qquad (3)$$

---

[1] Je m'appuie ici sur le principe généralement adopté, — bien qu'il ne soit pas toujours appliqué — que pour lui-même le maître doit se placer à un point de vue plus élevé que celui qu'il est obligé d'adopter vis-à-vis des élèves.

Ces trois groupes de formules suffisent déjà pour procéder à une première étude de la résolution des triangles quelconques. On montrera ensuite comment l'usage du demi-angle peut apporter certaines simplifications.

En appliquant (2), ou même (3), au triangle isocèle on se trouve immédiatement conduit aux relations entre le sinus et le cosinus de $\frac{\alpha}{2}$ et α. Si dans un triangle quelconque on veut introduire le demi-angle $\frac{\alpha}{2}$, on y parviendra le plus simplement possible en construisant les segments $b + c$ et $b - c$. La relation (1) appliquée aux triangles ainsi obtenus fournit immédiatement les formules de Mollweide et par conséquent celles de Neper. L'introduction de $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ dans (2) conduit à des relations bien connues et à l'expression de l'aire du triangle. On s'assurera que les formules obtenues conviennent encore au cas où le triangle renferme un angle obtus, en établissant que l'on a $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos (180^\circ - \alpha) = - \cos \alpha$.

Ces premiers éléments mettront l'élève en possession d'une méthode simple pour la résolution des triangles, et le premier cycle dans l'enseignement de la trigonométrie présentera ainsi un ensemble bien déterminé. Ce résultat peut être atteint en consacrant à cette branche quelques heures par semaine.

Pendant le *second cycle* on étudiera les relations entre les différentes formules du triangle. Il sera aisé d'opérer le passage d'un groupe à un autre en utilisant des éliminations très simples et en faisant intervenir la valeur de la somme des angles d'un triangle. *La comparaison des résultats permettra déjà de s'élever au-dessus de la trigonométrie du triangle.* Par exemple on peut obtenir la propriété exprimée par les formules de Mollweide par deux voies analogues, en combinant par addition ou soustraction d'abord deux quelconques des formules du groupe (1), puis deux des formules du groupe (2). En identifiant les résultats on obtiendra les expressions relatives à la somme et à la différence de deux sinus ou cosinus exprimées en fonction du produit de sinus et de cosinus de la demi-somme ou demi-différence des angles ; un calcul simple conduira ensuite aux quatre formules du théorème

d'addition. En opérant de la sorte les deux angles qui interviennent dans ces formules doivent satisfaire uniquement à la condition que leur somme ne dépasse pas deux angles droits ; pour s'affranchir de cette restriction il suffira d'établir les relations

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Les formules d'addition peuvent encore être établies d'une manière plus directe ; nous utiliserons à cet effet le langage de la géométrie analytique. On considère un triangle dont l'un des sommets A coïncide avec l'origine d'un système d'axes rectangulaires choisi de manière que les abscisses ou les ordonnées des deux autres sommets B et C aient des valeurs égales ou égales et opposées. L'évaluation de l'aire du triangle peut être obtenue aisément quelle que soit la position des sommets B et C ; on déterminera d'abord l'aire par la méthode planimétrique, puis on établira son expression à l'aide de formules trigonométriques. Si l'on tient compte ensuite de la relation entre les coordonnées rectangulaires et les coordonnées polaires, on obtiendra une expression générale pour $\sin(\alpha - \beta)$, dont on déduira facilement les trois formules correspondantes.

Dans le *troisième cycle* on se placera au point de vue de l'*inversion*. On examinera les formules (2) et (3) pour des longueurs et des angles quelconques. Si les relations (2), ou encore de groupe (3), subsistent pour trois longueurs quelconque a, b, c, et trois angles quelconques α, β, γ et si l'on fait abstraction des triangles impropres et non réels, on reconnaît qu'en effet on se trouve en présence d'un triangle unique défini par les éléments a, b, c, α, β, γ. Aux formules (2) on doit toutefois joindre la condition $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, qui peut être écrite sous la forme trigonométrique

$$\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha = 0. \tag{4}$$

On peut donc s'attendre à ce que, d'un pareil *groupe caractéristique* pour l'existence d'un triangle, on puisse déduire tous les autres groupes de formules en se servant uniquement de transformations algébriques et sans avoir recours à la Géométrie. Ce problème peut être résolu de différentes manières ; je me con

tenterai de montrer ici comment de la relation (3) on peut déduire les formules (1), (2) et (4). Élevons au carré les formules (1) et (3) afin de pouvoir les comparer plus facilement avec (2). On a :

$$\Sigma_a \equiv b^2 \sin^2 \gamma - c^2 \sin^2 \beta = 0, \tag{1'}$$

(a, b, c, doivent être pris dans l'ordre cyclique),

$$\pi_{bc} \equiv (a - b \cos \gamma)^2 - (c \cos \beta)^2 = 0, \tag{3'}$$

si l'on écarte le cas des triangles impropres, ces formules sont équivalentes aux groupes (1) et (3). A la formule (4) joignons le facteur $2\,bc$, c'est-à-dire posons

$$R_a \equiv 2bc[\cos(\beta + \gamma) + \cos \alpha)] = 0. \tag{4'}$$

Entre les expressions π, Σ, C, P, renfermant les éléments *quelconques* a, b, c, α, β, γ, on a les relations identiques :

$$\pi_{bc} + \pi_{cb} \equiv C_b + C_c\ , \tag{5}$$

$$2C_a \equiv \pi_{ac} + \pi_{ca} + \pi_{ab} + \pi_{ba} - \pi_{bc} - \pi_{cb}, \tag{6}$$

$$2\Sigma_a \equiv \pi_{ac} + \pi_{ca} - \pi_{ab} - \pi_{ba} - \pi_{bc} + \pi_{cb}, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} C_a + \Sigma_a &\equiv \pi_{ac} + \pi_{ca} - \pi_{bc}, \\ C_a - \Sigma_a &\equiv \pi_{ab} + \pi_{ba} - \pi_{cb}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\pi_{ab} \equiv C_b - \Sigma_c\ . \tag{8^a}$$

La formule (8^a) représente l'ensemble des formules (5) à (8), car celles-ci se déduisent immédiatement de (8^a). La signification est très claire ; elle montre que les pensées géométriques qui conduisent aux expressions (1), (2), (3) sont soumises à une relation et elle donne cette relation ; autrement dit elle fait voir que deux de ces pensées ne peuvent être ramenées l'une à l'autre qu'en ayant recours à la troisième.

Quant à R_a, son expression [1] la plus simple s'obtient en conservant P_a et S_a ; on a

$$R_a \equiv P^2{}_a + S^2{}_a - C_a - C_b - C\ . \tag{9}$$

---

[1] Si dans (9) on veut éviter b et c, on trouve, en tenant compte de $C_a + C_c = 2cP_c$, la forme plus compliquée :

$$(C_a + C_b)\,(C_a + C_c)\,R_a = 2P_b\,P_c\,(P^2{}_a + S^2{}_a - C_a - C_b - C_c). \tag{9}$$

Les considérations qui interviennent dans ce troisième cycle s'étendent de nouveau à toute la Trigonométrie. Mais, comme le calcul explicite des résultats présente quelques difficultés, je me bornerai à un exemple simple. Supposons qu'il s'agisse des différentes formes trigonométriques de la condition qui exprime que la somme de deux angles α, β (mod. 4 droits) est égale à deux droits.

La plupart de ces formes ne représentent pas uniquement la condition proposée ; d'autre part on doit tenir compte que dans bien des applications les conditions auxiliaires ne peuvent être satisfaites. Voici les formes les plus connues :

$$\left.\begin{array}{ll} P \equiv 1 - \sin(\alpha+\beta) = 0, & \cos(\alpha+\beta) = 0, \\ A \equiv \sin\alpha - \cos\beta = 0 & B \equiv \sin\beta - \cos\alpha = 0, \\ S \equiv \sin 2\alpha - \sin 2\beta \equiv 0, & \\ C \equiv \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 \equiv \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 0. & \end{array}\right\} \quad (10)$$

Envisageons α, β comme des angles quelconques et déterminons les relations numériques (syzygies) entre les premiers membres des relations (10).

Entre les deux expressions de la première ligne on a nécessairement la syzygie

$$P^2 + \cos^2(\alpha+\beta) \equiv 2P. \quad (11)$$

On peut donc écarter $\cos(\alpha+\beta)$, et chercher les syzygies entre les cinq expressions

$$P, A, B, S, C. \quad (12)$$

Les déterminants fonctionnels permettent de reconnaître qu'entre deux quelconques des expressions (12) il n'existe pas de syzygie. D'autre part l'élimination de α, β entre trois quelconques de ces expressions montre qu'il existe une syzygie (non identiquement nulle) entre ces trois expressions ; en vertu de la proposition précédente on voit qu'il n'en existe qu'une sorte et qu'elle est irréductible. Ces dix syzygies peuvent toutes être obtenues à l'aide des moyens ordinaires de l'algèbre élémentaire ;

nous indiquerons seulement celles dont on peut déduire facilement les autres :

$$A^2 + B^2 = 2P,$$

$$(B^2 - A^2)^2 (A^2 + B^2 - 4) + 4S^2 (A^2 + B^2) = 0$$

$$A^2B^2 (A^2 + B^2 - 4) + C^2 (A^2 + B^2) = 0$$

$$[S^2B^4 + \{ C^2 + B^2 (B^2 - 2) \}^2] (S^2 + 4C^2) = 4B^4S^2.$$

Ces syzygies sont d'une signification simple ; *elles embrassent l'ensemble des relations réciproques entre les expressions* (12).

Mais on peut faire encore un pas de plus et sortir entièrement du domaine trigonométrique. Les formules (10) renferment quatre variables $\sin \alpha = x_1$, $\sin \beta = x_2$, $\cos \alpha = y_1$, $\cos \beta = y_2$ soumises aux relations

$$P_1 \equiv x^2_1 + y^2_1 - 1 = 0, \qquad P_2 \equiv x^2_2 + y^2_2 - 1 = 0; \tag{14}$$

tandis que $\sin (\alpha \pm \beta)$, $\cos (\alpha \pm \beta)$, sont définis par

$$\sin (\alpha \pm \beta) = x_1y_2 \pm x_2y_1, \qquad \cos (\alpha \pm \beta) = y_1y_2 \mp x_1x_2. \tag{15}$$

Si maintenant on combine P_1, P_2 avec trois quelconques des expressions (12) on aura des systèmes de valeurs (x_1, x_2, y_1, y_2) pour lesquels les cinq expressions disparaissent ; leur résultant doit par conséquent être identiquement nul.

Si donc on forme le résultant (irréductible) de :

$$P_1 - x^2_1 - y^2_1 + 1, \qquad P_2 - x^2_2 - y^2_2 + 1, \tag{14a}$$

et de trois des expressions :

$$P - (1 - x_1y_2 - x_2y_1), \tag{12a}$$

$$A - x_1 + y_2, \qquad B - x_2 + y_1,$$

$$S - 2x_1y_1 - 2x_2y_2, \qquad C - y^2_1 - y^2_2 + 1,$$

on obtiendra la syzygie cherchée entre P_1, P_2 et trois quelconques des expressions (12).

Ici encore les calculs [1] n'offrent aucune difficulté ; nous

[1] Le lecteur effectuera sans peine un calcul analogue pour les relations (5) à (9).

donnons, à titre d'exemples, les relations suivantes :

$$A^2 + B^2 - P_1 - P_2 = 2P,$$

$$S^2 (A^2 + B^2) + 4SAB (P_1 - P_2) + (A^2 - B^2)^2 [(A^2 + B^2 - 4)$$
$$- 2 (P_1 + P_2) + (A^2 + B^2) (P_1 - P_2)^2] = 0,$$

$$C^2 (A^2 + B^2) (A^2 - B^2)^2 + 2C [2 (P_1 - P_2) (B^2 - A^2)$$
$$- (B^2 + A^2) (B^2 - A^2) (B^2P_1 - A^2P_2)]$$
$$+ A^2B^2 (A^2 - B^2)^2 \{ (A^2 + B^2 - 4) - 2 (P_1 + P_2) \}$$
$$+ A^2B^2 (A^2 + B^2) (P_1 - P_2)^2$$
$$+ (A^2 + B^2) (A^2P_2 - B^2P_1)^2 + 4 (P_1 - P_2) (A^2P_2 - B^2P_1) = 0.$$

On objectera que précisément dans cette voie — de même que dans l'arithmétisation des irrationnelles d'après Kronecker — des relations très simples entre les irrationalités trigonométriques se présentent dans une longue suite de relations numériques entre des fonctions entières dont l'ensemble est difficile à embrasser [1]. Il est vrai que cette difficulté n'est souvent qu'apparente et qu'elle provient des calculs effectués explicitement ; tandis que nous pouvons appuyer nos considérations en rappelant que l'algèbre possède maintenant des méthodes systématiques permettant de former de pareils résultants de fonctions entières. Mais cette étude n'a pas encore été faite pour la trigonométrie élémentaire.

Le cycle suivant aurait pour but d'introduire les notions d'invariants, des syzygies et de leurs systèmes complets.

W. Franz Meyer (Königsberg i. Pr.)

---

[1] Quelque chose d'analogue se présente dans les équations modulaires.