Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1899)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE PREMIÈRE LEÇON DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
Autor: Budelot, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1237

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le plan polaire d'un point quelconque se confond avec le plan double.

Chasles regardait comme le meilleur critérium d'une méthode le fait qu'elle s'appliquait aussi facilement à la Géométrie plane qu'au problème correspondant de la Géométrie de l'espace ; il est impossible de ne pas reconnaître, qu'à ce point de vue, la nouvelle classification est parfaite.

A. Poussart (Paris).

UNE PREMIÈRE LEÇON DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On sait quelles difficultés rencontrent les commençants lorsque, après avoir considéré un système de deux plans de projection, ils font le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, rabattement destiné à donner l'épure.

On sait aussi quels inconvénients entraîne la considération, pendant la plus grande partie du cours, d'un système unique de deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical : les élèves n'ont pas le temps de se familiariser avec la méthode des changements de plans ; et puis il y a aussi les problèmes insolubles, momentanément, parce que telle droite est de profil, alors le professeur est forcé de dire à ses élèves : vous verrez cela plus tard.

Qu'on le veuille ou non, la considération de plus de deux plans s'impose dès le début, et par conséquent il en est de même pour les changements de plans : on peut donner encore, entre autres raisons, la nécessité où se trouve l'artisan le moins instruit de dessiner un plan et deux élévations pour représenter l'objet le plus simple.

Tout cela a été signalé depuis longtemps. Tout récemment, M. Laisant, dans son très intéressant ouvrage : *La Mathématique*, insiste sur ce fait qu'il ne faut pas « rendre l'élève esclave de deux plans de projection et d'une ligne de terre invariablement tracée ».

Du reste, dans plusieurs traités, on a cherché à éviter, par différents procédés, les difficultés et les inconvénients dont il vient d'être question. Voici une méthode simple qui a pour elle une expérience continue de plusieurs années avec des élèves de mathématiques élémentaires ; elle permet de passer, sans rabattement, de la figure de l'espace à l'épure ; elle permet aussi d'éviter les inconvénients d'un système unique de deux plans de projection.

1. — On sait que d'un point M on peut mener à un plan P une perpendiculaire et une seule (5e livre de Géométrie). Le pied de cette perpendiculaire est la *projection* du point M sur le plan P [1]. La perpendiculaire est la *projetante* du point sur le plan.

2. — Soient maintenant (fig. 1) :

— une figure formée de points A, B, C, D,... et réduite, s'il le faut, à une échelle déterminée ;

— un plan horizontal, H, formé par une feuille de papier ;

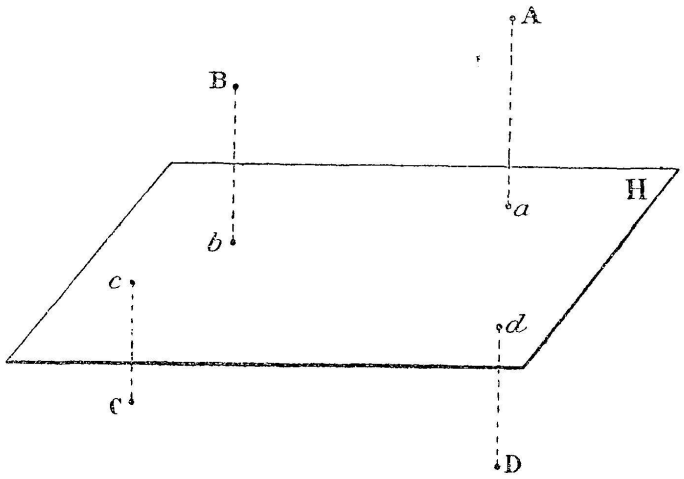

Fig. 1.

— enfin un observateur dont l'*œil* est au-dessus du plan H et qui regarde la figure ABCD...

Chacun des points A, B, C, D,...

1° n'a qu'une projection *a*, *b*, *c*, *d*,...

2° n'a qu'une distance au plan H (*cote*) ;

[1] Il faudrait dire ici : *projection orthogonale*, mais comme, dans la suite de cet article, on n'aura à considérer que des projections orthogonales, on dira *projection*, tout court.

3° enfin, chacun des points est, par rapport à l'observateur, soit au-dessus du plan H, soit au-dessous. Il résulte de là que deux points différents donnent des résultats qui diffèrent par l'un au moins des trois éléments : projection, cote, sens. Par conséquent, à une figure donnée ABCD....., de l'espace, correspond une figure plane *abcd*..., tracée sur H, où l'on associe à chaque point *a*, *b*, *c*, *d*,... sa cote et le sens dans lequel elle est comptée.

Pour que ces indications soient nettes, *on peut* (fig. 2) tracer

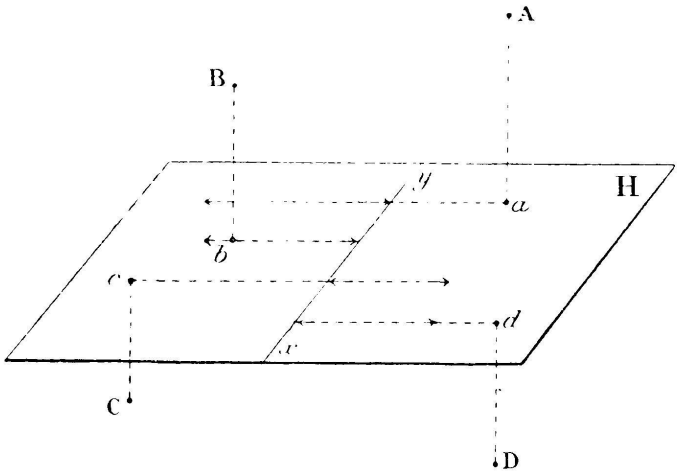

Fig. 2.

une droite quelconque *xy* dans le plan H, puis mener par *a*, *b*, *c*, *d*,... des perpendiculaires à *xy* et prendre les cotes, sur ces perpendiculaires, à partir de *xy* :

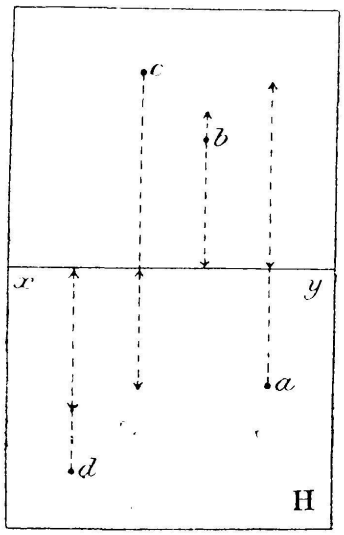

Fig. 3.

au-dessus de *xy*, pour les points situés *au-dessus* de H,

au-dessous de *xy*, pour les points situés *au-dessous* de H,

l'observateur (qui n'est autre que l'opérateur) lisant toujours *xy* de gauche à droite.

(Pour plus de clarté, les cotes prises dans le plan H sont indiquées par ←——→).

Maintenant, si l'on enlève la figure ABCD... de l'espace et que l'on considère seulement les tracés faits sur la feuille H, on a une *épure* (fig. 3) et l'on voit qu'à une figure de l'espace correspond une épure et une seule.

Réciproquement, à une épure donnée correspond une figure de l'espace et une seule. Pour le montrer, on place horizontale-

ment la feuille H contenant l'épure — par exemple, la feuille de la figure 3 — les tracés en dessus, puis on mène par a, b, c, d,... des perpendiculaires à H et on prend les cotes :

au-dessus de H si, dans l'épure, elles étaient *au-dessus* de xy,
au-dessous de H si, dans l'épure, elles étaient *au-dessous* de xy,

en lisant toujours xy de gauche à droite. On retrouve évidemment ainsi la figure ABCD... de l'espace (fig. 2).

3. — La droite xy a été prise quelconque dans le plan H de la figure 1 ; si l'on considère le plan vertical V passant par xy, il sera également quelconque. — Soient a', b', c', d',... (fig. 4) les

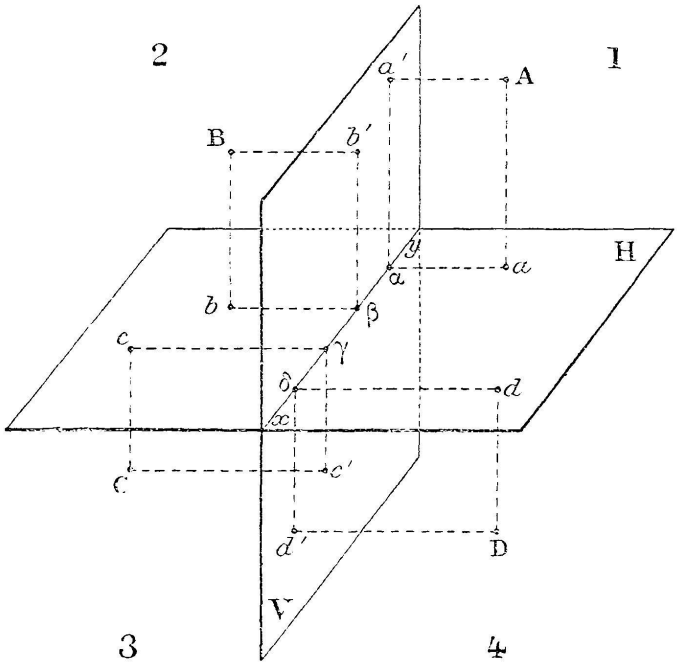

Fig. 4.

projections des points A, B, C, D,... sur V. Les longueurs a'A, b'B, c'C, d'D, ... sont les *éloignements* des points A, B, C, D, ... Les points a, b, c, d, ... sont les *projections horizontales* des points A, B, C, D, ... et les points a', b', c', d', ... sont les *projections verticales* de A, B, C, D, ... La droite xy est la *ligne de terre* relative aux deux plans de projection H et V considérés.

Si l'on détermine les intersections, avec H et V, des plans aAa', bBb', ... les quadrilatères A$a\alpha a'$, B$b\beta b'$, ... sont des rectangles. Par exemple A$a\alpha a'$: Aa et Aa' respectivement perpendiculaires à H et V sont respectivement perpendiculaires à αa et $\alpha a'$, donc $a = a' = 1$ *dr.* ; d'autre part, le plan aAa' étant perpendiculaire

à H et V (puisqu'il passe par des perpendiculaires à ces plans) est par conséquent perpendiculaire à xy ; il détermine donc le rectiligne $a\alpha a'$ du dièdre correspondant, et, comme ce dièdre est droit, $a\alpha a' = 1\ dr.$; donc $Aa\alpha a'$ est un rectangle. On déduit de là que $aA = \alpha a'$ et $a'A = \alpha a$, et, comme αa et $\alpha a'$ sont perpendiculaires à xy, on peut dire que les cotes sont égales aux distances des projections verticales à xy, et que les éloignements sont égaux aux distances des projections horizontales à xy.

Par conséquent la figure 3 représente à la fois les tracés faits sur H et V à condition que :

1° l'on mette a', b', c', d', ... aux extrémités des cotes (extrémités non situées sur xy) et que :

2° l'on considère les éloignements comme devant être pris :

au-dessous de xy, pour les points situés *en avant* de V,

au-dessus de xy, pour les points situés *en arrière* de V,

par rapport à un observateur ayant l'œil au-dessus du plan horizontal, regardant la figure ABCD ... et le plan V et enfin lisant toujours xy de gauche à droite (fig. 5).

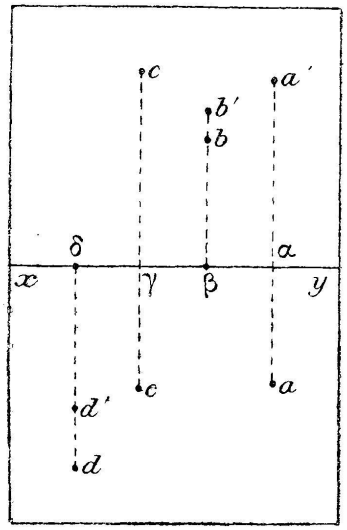

Fig. 5.

Ainsi, à une figure de l'espace, ABCD ..., correspond un ensemble unique de deux projections sur deux plans perpendiculaires H et V, et telles que les deux projections d'un même point de l'espace sont sur une même perpendiculaire à xy (*ligne de rappel*).

Réciproquement, étant donnée une épure formée par des couples de points aa', bb', ... tels que les deux points d'un même couple sont sur une même ligne de rappel, à cette épure correspond une figure de l'espace et une seule. La démonstration de ce fait résulte de ce qui a été dit pour le plan H considéré seul, mais on peut en donner une démonstration directe. Soit donc l'épure donnée par la figure 5 : on imagine deux feuilles identiques à la feuille 5 et on les place perpendiculairement l'une à l'autre de façon que les deux droites xy coïncident ainsi que les deux points α, les deux points β, ... (fig. 4) ; on mène par a et a'

les perpendiculaires respectives à H et à V, ces deux droites sont dans un même plan (le plan aaa') et dans ce plan elles sont perpendiculaires à deux droites qui se coupent, donc elles se coupent elles-mêmes et en un point qui n'est autre que le point A. Les autres points B, C, D, ... sont reproduits de même.

4. — En résumé, la figure 5 peut être considérée à un double point de vue : elle représente les projections de la figure ABCD... soit sur un plan horizontal H unique, soit sur un système de deux plans, l'un, horizontal, l'autre, vertical.

Ainsi, sans avoir fait de rabattement, on a l'épure d'une figure de l'espace sur deux plans perpendiculaires. Les élèves ont donc constamment devant les yeux soit la figure avec l'ensemble des deux plans, soit l'ensemble seul des deux plans, soit enfin le plan horizontal seul, c'est-à dire l'épure, et, par conséquent ils voient constamment la figure *en rapport* avec les deux plans ou avec un seul. D'ailleurs savoir isoler les plans les uns des autres est avantageux dans la considération des parties des traces de surfaces situées sur la partie postérieure du plan horizontal ou sur la partie inférieure du plan vertical ; cela est avantageux encore dans les questions d'ombres portées sur les plans de projection...

De plus, ayant commencé par considérer un plan horizontal seul, puis ayant pris un plan vertical quelconque, les élèves en prendront tout aussi facilement plusieurs autres et formuleront d'eux-mêmes la règle du changement de plan vertical.

Ces préliminaires posés, on peut continuer de la manière suivante.

5. — Quand on a pris un système de deux plans perpendiculaires V et H, on a à considérer quatre dièdres qu'il est commode de numéroter :

1er, celui où est l'œil de l'observateur,
2e, le dièdre adjacent supérieur,
3e, celui qui est sous le 2e,
4e, celui qui est sous le 1er (fig. 4).

De même, pour simplifier l'écriture, après avoir remarqué que

la ligne de terre divise V et H en deux demi-plans, on désigne par

H_a, le demi-plan horizontal antérieur,
H_p, le demi-plan horizontal postérieur,
V_s, le demi-plan vertical supérieur,
V_i, le demi-plan vertical inférieur.

Il faut *voir*, au-dessous de la ligne de terre, ou bien H_a seul, ou bien ensemble H_a et V_i; au-dessus, ou bien H_p seul, ou bien ensemble H_p et V_s.

6. — Étant donné un point d'un certain dièdre par sa cote et son éloignement (en nombres ou bien en longueurs déterminées par des portions de droites) il faut pouvoir immédiatement en faire l'épure. Réciproquement, étant données, dans une épure, les deux projections d'un point, il faut pouvoir dire sans hésiter dans quel dièdre il se trouve.

Les règles suivantes, qu'il faut savoir imperturbablement, sont très commodes à appliquer ; elles sont du reste évidentes. Si un point est dans 1 ou 3, les deux projections sont de part et d'autre de la ligne de terre :

dans 1, la projection verticale est au-dessus de la ligne de terre,

dans 3, la projection verticale est au-dessous de la ligne de terre.

Si un point est dans 2 ou 4, les deux projections sont d'un même côté de la ligne de terre :

dans 2, elles sont au-dessus de la ligne de terre,

dans 4, elles sont au-dessous de la ligne de terre.

Les réciproques sont vraies.

Quand on a deux plans de projection, un point a deux projections ; aussi, au lieu de dire : le point A, le point B, ..., on dit : *le point aa'*, *le point bb'*, ... La lettre accentuée désigne toujours la projection verticale.

Ainsi (fig. 4 et 5), le point A est dans 1, le point B est dans 2, le point C est dans 3 et le point D dans 4.

On voit bien maintenant l'importance qu'il y a de lire toujours *xy* dans le même sens (par exemple, de gauche à droite,

ainsi qu'on l'a fait jusqu'à présent); on fera tourner la feuille sur elle-même, si cela est nécessaire, et, pour lire plus commodément, on imaginera que chaque lettre a également tourné sur elle-

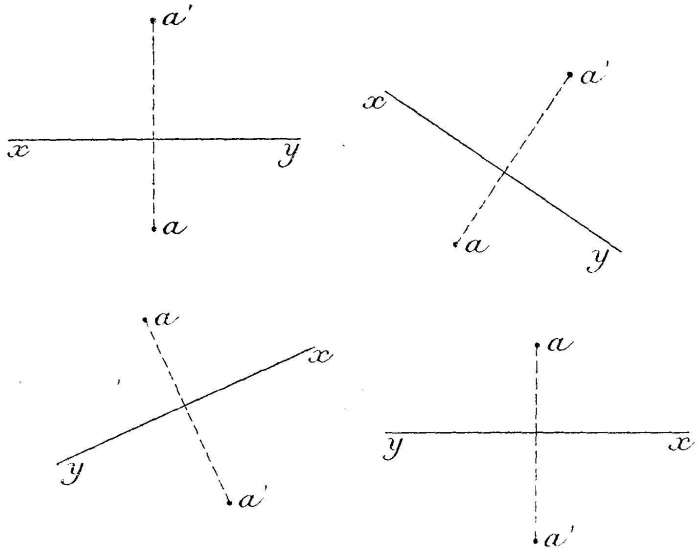

Fig. 6.

même. — Dans les quatre épures suivantes (fig. 6), on a un point de 1.

7. — Une petite remarque est maintenant utile. Si un point est à égale distance des deux plans H et V choisis, c'est-à-dire s'il appartient à l'un des deux bissecteurs des quatre dièdres, sa cote et son éloignement sont égaux et par suite ses projections sont à égale distance de xy. Elles sont donc confondues si le point appartient aux dièdres 2 ou 4.

Les réciproques sont vraies.

Le point E (fig. 7), est dans le premier bissecteur (dièdre 1) ;

Le point F est dans le second bissecteur (dièdre 2) ;

Le point L est dans le premier bissecteur (dièdre 3) ;

Le point O est dans le second bissecteur (dièdre 4).

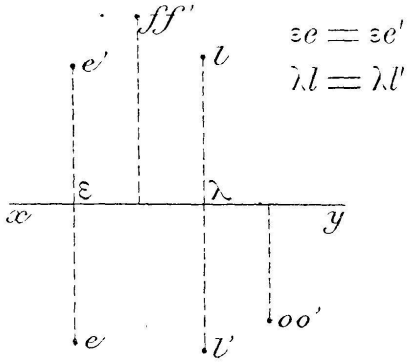

Fig. 7.

8. — Après avoir pris un point dans chacun des quatre dièdres, il reste à faire l'épure d'un point pris dans l'un des plans de projection. Pour cela, on remarquera que si un point est dans le plan horizontal,

1° sa cote étant nulle, sa projection verticale est sur la ligne de terre ;

2° sa projection horizontale est le point lui-même, donc elle est (fig. 8 et 9)

au-dessous de la ligne de terre, si le point est dans H_a (point I),

au-dessus de la ligne de terre, si le point est dans H_p (point J).

Si un point est dans le plan vertical,

1° son éloignement étant nul, sa projection horizontale est sur la ligne de terre ;

2° sa projection verticale est le point lui-même, donc elle est :

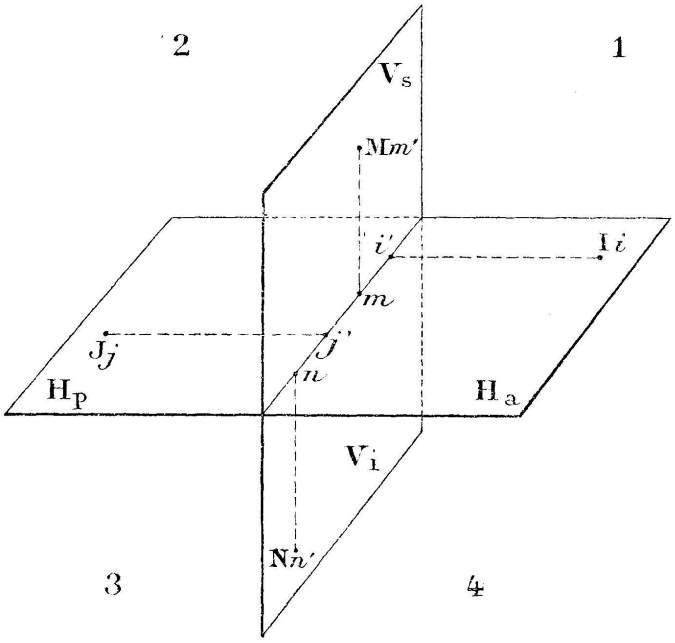

Fig. 8.

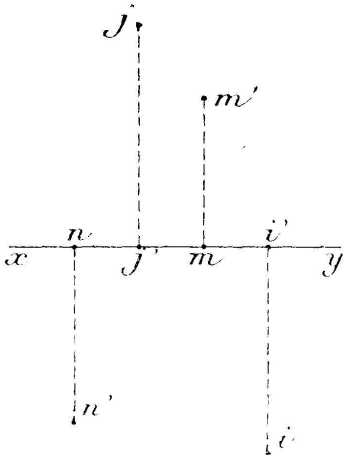

Fig. 9.

au-dessus de la ligne de terre, si le point est dans V_s (point M);

au-dessous de la ligne de terre, si le point est dans V_i (point N).

Les réciproques sont vraies.

Comme cas très particulier, il faut considérer un point appartenant à la fois à H et V, c'est-à-dire à la ligne de terre : ses deux projections sont évidemment confondues sur la ligne de terre.

A cet endroit du cours, il est indispensable que les élèves fassent des exercices nombreux sur les diverses positions du point par rapport à un système de deux plans perpendiculaires H et V. On leur fera, par exemple, exécuter de petites épures de points. Ces points leur seront donnés chacun par son dièdre ou son demi-plan accompagné de la cote et de l'éloignement....

9. — Au début de cette étude, on a projeté une figure ABCD... sur un plan horizontal H, puis, pour avoir une figure plane, on a porté les cotes dans ce plan et à partir d'une droite xy quelconque, ce qui a donné un premier mode de représentation. Ensuite, on a introduit un plan vertical V, quelconque, puisqu'il dépend de xy, ce qui a donné un second mode de représentation identique au premier.

Or, il est évident que, quelle que soit cette droite xy et par suite quel que soit ce plan V, la projection horizontale $abcd$... et les cotes restent invariables (puisque projection et cotes sont relatives au plan H) ; seuls, la projection $a'b'c'd'$... et les éloignements changent quand V change (cependant les projections sont égales pour deux plans verticaux parallèles entre eux). Par conséquent, ayant choisi d'abord un plan vertical V, on peut passer de l'épure relative au système HxyV à l'épure relative à un autre système $Hx_1y_1V_1$ sans avoir recours à la figure de l'espace. Voici la règle pratique évidente pour chaque point :

1re, la projection horizontale ne change pas ;

2e, la cote ne change pas ;

3e, la nouvelle projection verticale vient sur une perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre x_1y_1, à une distance égale, et au-dessus de x_1y_1 si l'ancienne projection verticale est au-dessus de xy, au-dessous de x_1y_1 si l'ancienne projection verticale est au-dessous de xy (fig. 10).

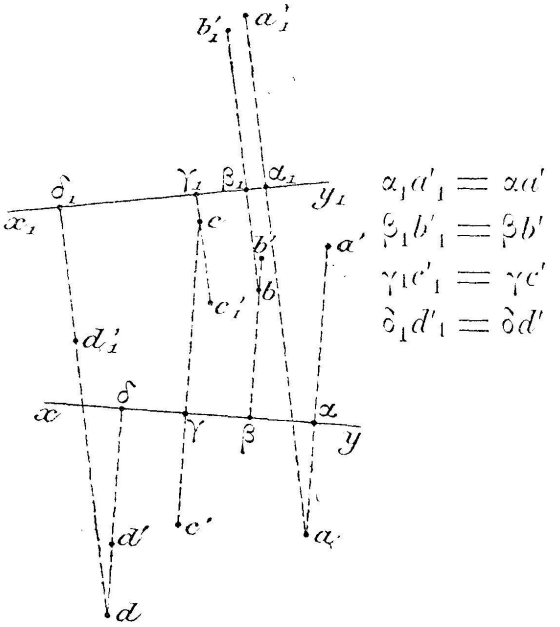

Fig. 10.

L'ancienne projection verticale de la figure ABCD... est $a'b'c'd'$..., et la nouvelle projection verticale est $a'_1b'_1c'_1d'_1$....

Bien entendu, on lit toujours x_1y_1 de gauche à droite, et l'observateur aura dû, en général, changer de position, mais en remplissant toujours les conditions connues : son œil est au-dessus de A et il regarde la figure et le plan V_1.

En réalité, par suite de l'identité des deux modes de représen-

tation, on pourrait dire qu'un changement de plan se réduit à un simple *changement de droite*.

Puisqu'on a un autre plan vertical V_1, les dièdres de V et de H ne sont pas conservés tels quels : les dièdres supérieurs de même numéro empiètent généralement l'un sur l'autre, et il en est de même des dièdres inférieurs. Par conséquent, un point peut *rester* dans le dièdre où il était ou bien *passer* dans un autre : par exemple, dans le cas particulier de l'épure de la figure 9,

le point A est resté dans le premier dièdre,
le point B a passé du deuxième dans le premier,
le point C a passé du troisième dans le quatrième,
le point D est resté dans le quatrième.

En même temps que les dièdres changent, certaines propriétés se perdent : par exemple la propriété d'être dans un bissecteur, dans un plan vertical de projection,...

Ici encore, il est bon de faire de nombreux exercices avec des plans V_2, V_3, ... placés de manières variées et dont un, au moins, est parallèle au plan V. On pourra prendre ces plans au hasard ou les déterminer de façon à faire passer un point d'un dièdre dans un autre désigné d'avance. On peut enfin, si on le veut, déplacer le plan horizontal parallèlement à lui-même.

10. — On pourrait même parler du changement de plan horizontal, mais il est préférable de le rejeter à la théorie complète des changements de plans, car ce qui a été dit suffit jusque-là. En tout cas, on fera remarquer qu'on a, au début du cours, projeté une figure sur un certain plan horizontal H, puis, qu'on a introduit un plan vertical V quelconque ; mais qu'on aurait pu tout aussi bien commencer par projeter la figure sur un plan vertical V — au moyen des conventions connues — et introduire ensuite le plan horizontal H : les résultats auraient été les mêmes. On aurait même pu introduire un plan quelconque H_1, non horizontal au sens physique du mot, mais assujetti seulement à la condition d'être perpendiculaire au plan vertical et jouant par conséquent le même rôle que le plan H. Par analogie, on conserve à ce plan H_1 le nom de plan horizontal.

On *voit* donc le changement de plan horizontal tout aussi facilement que le changement de plan vertical.

On remarque, en passant, que la figure 5, qui représente les projections d'une figure

soit sur un plan horizontal H seul,

soit sur un système de deux plans H et V,

représente aussi la projection de la même figure sur un plan vertical V seul.

Peut-être trouvera-t-on trop chargée cette étude du point, mais on peut y mettre tout le temps nécessaire. Il faut bien se persuader en effet qu'on n'insistera jamais assez sur ce sujet, et qu'il ne faut pas se hâter de passer à l'étude de la droite sous le prétexte très tentant qu'on y retrouvera le point ; quand les élèves ont à apprendre la droite, ils ne voient plus le point, et, s'ils ne *savent* pas suffisamment celui-ci, ils ne peuvent même pas résoudre les questions les plus simples sur la droite, comme, par exemple : trouver les traces d'une droite connaissant ses projections.

Du reste, cette complication de la première leçon est plus apparente que réelle : les parties qui la composent se trouvent dans tous les cours à différents endroits. Mais, faite ainsi, elle donne immédiatement aux élèves une sensation plus exacte de ce qu'est la Géométrie descriptive, et cela est une large compensation ; si l'on compte en outre les avantages directs de clarté et de commodité qui s'y trouvent et qui en découlent, on verra que, somme toute, on a gagné en rapidité et que les élèves savent mieux. — Il faudrait évidemment, pour s'en rendre très bien compte, développer le cours élémentaire presque en entier, mais l'ensemble qui précède suffit à en donner une idée.

G. Budelot (Melun).