

SUR LE POSTULATUM DES PARALLÈLES

Autor(en): **WICKERSHEIMER, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4656>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE POSTULATUM DES PARALLÈLES

Toutes les difficultés soulevées par les discussions entre les Euclidiens et les Métagéomètres me paraissent résolues par le remarquable ouvrage de A.-W. Russel dont je reproduis ici une partie des conclusions.

« La géométrie projective, qui n'a aucune référence à la grandeur, est nécessairement vraie de toute forme d'extériorité. Les trois axiomes (homogénéité, dimensions et ligne droite) ont tous été déduits du concept d'une forme d'extériorité et ont tous été déclarés *a priori*, attendu qu'une telle forme est nécessaire à l'expérience. Dans la géométrie métrique, au contraire, nous avons trouvé un élément empirique, qui naît de l'alternative entre les espaces euclidiens et non-euclidiens. Il subsistait encore trois axiomes *a priori* communs à ces espaces et qui sont les conditions nécessaires de la possibilité de la mesure ; ce sont : l'axiome de la libre mobilité, l'axiome suivant lequel l'espace a un nombre fini de dimensions, et l'axiome de la distance. A part l'idée nouvelle du mouvement, ceux-ci nous ont paru équivalents aux trois axiomes projectifs et, par suite, nécessairement vrais de toute forme d'extériorité. Mais les autres axiomes d'Euclide (l'axiome des trois dimensions, l'axiome suivant lequel deux lignes droites ne peuvent jamais enfermer un espace, et l'axiome des parallèles) ont été regardés comme des lois empiriques qui dérivent de l'étude et de la mesure de notre espace actuel, et qui ne sont vrais, en ce qui concerne les deux derniers, que dans les limites des erreurs d'observation. »

Je me propose de montrer, dans ce qui suit, que l'axiome des parallèles est inutile à la construction de la Géométrie euclidienne.

Pour cela, je suppose connu tout ce qui concerne le point et la ligne droite.

La Géométrie euclidienne a pour but la mesure des figures.

L'élément de la mesure est la distance entre deux points A et B par la ligne droite définie par ces deux points. Or, la mesure est l'application du nombre au continu. Une grandeur mesurable est nécessairement divisible à l'infini et il faut considérer comme égales les parties de cette division. Si donc je compare deux droites AB, A'B' ; si A'B' n'est pas un multiple exact de AB, ces grandeurs doivent néanmoins être considérées comme ayant une commune mesure. On peut, en effet, écrire

$$(M + 1) \mu > A'B' > M\mu$$

M étant un nombre entier. Les grandeurs qui comprennent A'B' sont dans le rapport $\frac{M}{M+1}$ qui tend vers l'unité quand μ décroît indéfiniment et ce rapport est égal à 1 quand μ est infiniment petit. Le rapport de grandeur de A'B' à AB est donc une quantité parfaitement déterminée λ s'il est certain que, quel que soit l'ordre de la sommation des éléments μ , cette limite est la même. Or, cela résulte précisément de ce que nous venons d'établir. Car, d'une part, si l'on prend $(M + 1) \mu$ ou $M \mu$ comme mesure de A'B' on commet, dans chaque cas, une erreur inférieure à μ puis que la différence $(M + 1) \mu - M \mu = \mu$ et, de l'autre, cette différence tend vers 0 quand μ décroît indéfiniment.

On peut considérer ce résultat comme une conséquence immédiate de l'axiome de la libre mobilité ou de congruence, comme dit Russel ; puisque, quel que soit l'ordre dans lequel on groupe les éléments μ par des superpositions successives, si on les épuise tous, on aboutira toujours aux mêmes sommes $(M + 1) \mu$ et $M \mu$.

Ce procédé n'est, d'ailleurs, pas nouveau et est employé tout au long de la Géométrie euclidienne pour mesurer les lignes, les surfaces planes et les volumes et on ne conçoit aucun moyen d'opérer autrement : c'est le procédé fondamental de l'analyse infinitésimale. On ne conçoit donc pas la répugnance que paraissent avoir eu les géomètres des deux derniers siècles à l'appliquer dès le début de la Géométrie puisqu'ils l'emploient couramment dans la suite et qu'Euclide lui-même l'appliquait sous la forme du principe des limites aux mêmes mesures.

Ceci posé, j'entre directement dans mon sujet.

Définition. — J'appelle triangles semblables ceux qui ont les côtés proportionnels.

Lemme. — Etant donné un triangle ABC si l'on imagine trois longueurs λAB , λAC , λBC (λ étant une dimension quelconque) chacune de ces longueurs est plus petite que la somme des deux autres et, par conséquent, elles remplissent les conditions nécessaires et suffisantes pour former un triangle tel que $A'B'C'$; ce triangle est, d'ailleurs, unique.

Ce lemme est démontré si je prouve qu'une ligne droite AB étant donnée, on peut toujours construire une ligne droite $A'B'$ telle que $A'B' = \lambda AB$, λ étant quelconque.

Or, j'ai démontré ci-dessus que deux lignes AB, $A'B'$ étant données il existe entre elles un rapport de grandeur déterminé, il ne me reste qu'à montrer comment cette détermination peut se faire. Le procédé est exactement le même que celui que j'ai adopté pour une première démonstration ; c'est-à-dire que je superposerai les droites AB et $A'B'$ le point A' se confondant avec le point A. Puis je divise AB en n parties égales entre elles μ et à partir du point B je porte ces divisions μ autant de fois que possible ; une dernière division s'arrêtera en deçà du point B' à une distance plus petite que μ et si je porte encore à la suite une dernière longueur μ elle dépassera le point B' d'une longueur plus petite qu'elle-même ; on aura donc encore

$$(M + 1) \mu > A'B' > M\mu$$

et si N est le nombre de divisions de AB tel que $AB = N\mu$ le rapport cherché λ sera compris entre $\frac{M+1}{N}$ et $\frac{M}{N}$ et en faisant croître indéfiniment N et M ou décroître indéfiniment μ , on aura ce rapport avec le degré d'approximations que l'on voudra.

Je crois même que cette dernière preuve n'est pas nécessaire et qu'il suffit de savoir, ce qui résulte de ce qui précède que ce rapport cherché est bien déterminé. Le *comment* de cette détermination peut paraître inutile pour être certain de l'exactitude du lemme, il suffit qu'elle soit *possible*.

THÉORÈME I. — Deux triangles semblables ont les angles égaux opposés aux côtés proportionnels.

Soient ABC , $A'B'C'$ les deux triangles ayant les côtés dans le même rapport λ .

Je trace le triangle ABC et je prends, sur le prolongement de AB , $AB' = A'B' = \lambda AB$.

De même $AC' = A'C' = \lambda AC$ et je joins $B'C'$.

D'après le lemme on aura nécessairement $B'C' = \lambda BC$.

Donc le triangle $AB'C'$ est égal au triangle $A'B'C'$, si l'on admet comme démontré que deux triangles qui ont les trois côtés égaux,

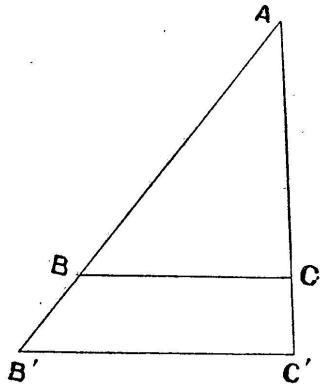


Fig. 1.

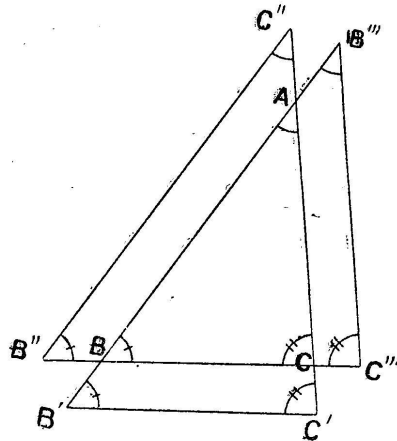


Fig. 2.

chacun à chacun, sont superposables. Or, cette démonstration se fait sans le secours du postulatum d'Euclide.

Opérons, maintenant, sur les sommets B et C comme nous avons opéré sur le sommet A , nous aurons la figure ci-contre, qui nous donne deux nouveaux triangles $CB''C''$ et $BB'''C'''$ qui seront égaux au triangle $AB'C'$ et, par suite, au triangle $A'B'C'$ (non figuré). Donc, les angles marqués de la même façon sont égaux. C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — Réciproquement, lorsque deux triangles ont les angles égaux deux à deux, ils sont semblables.

Faisons, en effet coïncider en A deux sommets homologues de deux triangles équiangles ainsi que les côtés comprenant l'angle commun.

Soient ABC , $AB'C'$ les positions des deux triangles.

Prenons $AC'' = \lambda AC$; λ étant le rapport $\frac{AB'}{AB}$. D'après le lemme, on aura $B'C'' = \lambda BC$ et, d'après le théorème I, angle $\widehat{AC''B'} = \text{angle } \widehat{ACB}$ et par conséquent $= \widehat{AC'B'}$. J'en conclus que C'' coïncide avec C' .

Supposons, en effet, que la coïncidence n'ait pas lieu. Portons la longueur $C''B'$ sur la direction $C'B'$, à partir de C' ; on obtient ainsi un point B'' . Joignons AB'' ; il résultera du théorème I que $AB'' = AB'$. Ce qui est impossible, puisque les obliques AB' , AB'' s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire AH abaissée de A sur $B'C'$. L'hypothèse inverse de $C''B' < C'B'$ est impossible pour la même raison donc B'' coïncide avec B' . C. Q. F. D.

DÉFINITION. — Lorsque deux droites font des angles égaux avec une troisième, elles sont dites parallèles.

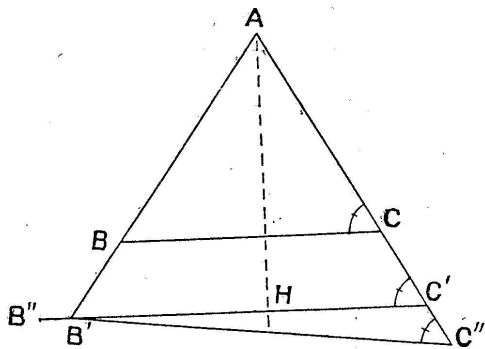


Fig. 3.

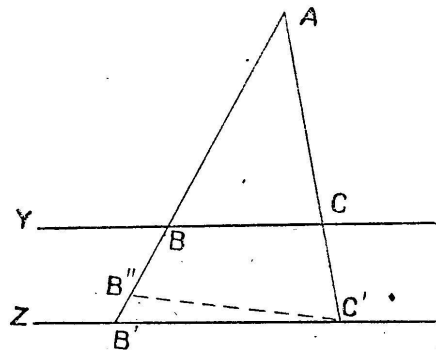


Fig. 4.

THÉORÈME III. — Toute droite rencontrant celle-ci fait également des angles égaux avec les parallèles, ainsi définies.

Soit CC' la droite primitive, CY , $C'Z$ les parallèles.

Menons par un point A de CC' une droite AB qui coupe CY en B et $C'Z$ en B' . (On peut, si l'on veut joindre A à un point B' de $C'Z$ pour être sûr que cette droite rencontrera CZ .)

Je dis que les angles en C étant égaux, ceux en B le seront aussi.

En effet, λ étant le rapport de $A'C'$ à AC , prenons $AB'' = \lambda AB$. Il résulte de ce qui précède que les deux triangles ABC $AB''C'$ sont semblables et que l'angle $\widehat{BCA} = \text{angle } \widehat{B''C'A}$ ce qui ne peut avoir lieu, par hypothèse, que si B'' coïncide avec B' . Alors, en vertu du théorème I l'angle $\widehat{ABC} = \text{l'angle } \widehat{AB'C'}$; C. Q. F. D.

Corollaire I. — Lorsque deux droites sont parallèles, une perpendiculaire à l'une, l'est nécessairement à l'autre; ou bien: une droite perpendiculaire à une droite quelconque CY du plan est nécessairement perpendiculaire à une droite quelconque CZ qui lui est parallèle.

En effet, par définition, il existe une droite CC' faisant des angles égaux avec les droites CX , $C'Y$. Soit ZZ' perpendiculaire en A à CX ; le corollaire I est démontré s'il est prouvé que ZZ'

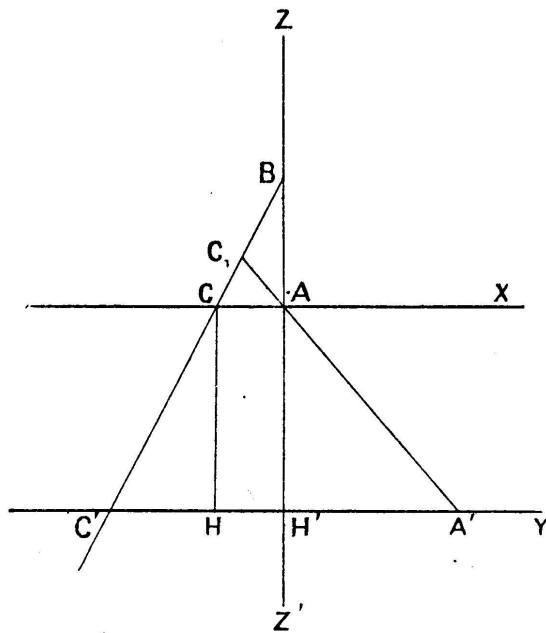


Fig. 5.

rencontre $C'Y$. Pour cela, je joins A au point A' de $C'Y$. D'après le théorème III, les angles que fait cette droite avec les parallèles CX , $C'Y$ sont égaux; et si l'on prend sur $C'C$ un point C_1 tel que $\frac{C_1C}{C_1C'} = \frac{CA}{C'A'}$ le point C_1 se trouvera nécessairement sur le prolongement de $A'A$. Si ce prolongement est dans l'angle droit $Z'AC$, ZZ' rencontre nécessairement $C'Y$ entre C' et A . S'il est dans l'angle supplémentaire ZZ' rencontre nécessairement $C'C$

en un point B ; et si l'on prend $C'H'$ tel que $\frac{C'H'}{CA} = \frac{C'B}{CB}$, le point H' est l'intersection de ZZ' avec $C'Y$. Le corollaire est donc démontré.

Corollaire II. — Deux parallèles ne peuvent se rencontrer à distance finie dans le plan.

Car, pour que cela fût possible, il faudrait que d'un point du plan on pût abaisser deux perpendiculaires sur une droite donnée.

Corollaire III. — Par un point C' pris dans un plan, on peut mener une parallèle et une seule à une droite quelconque CY passant par ce point.

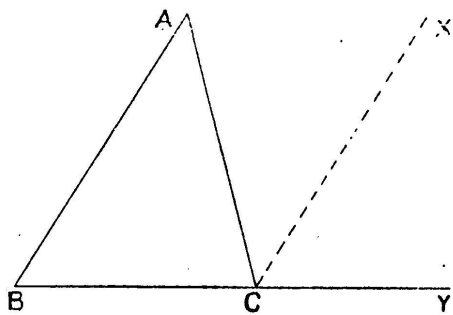


Fig. 6.

THÉORÈME IV. — La somme des angles d'un triangle est égale à deux droites. Prolongeons le côté BC du triangle ABC et par le point B menons une parallèle à BA . D'après le théorème III on a :

Angle $\widehat{CXY} = \text{angle } \widehat{ABC}$ et aussi angle $\widehat{XCA} = \text{opposé à l'angle } \widehat{BAC}$. C. Q. F. D.

Nous nous sommes appuyé, dans cette démonstration, sur cette proposition évidente, d'après ce qui précède, que par un point on peut toujours mener une parallèle et une seule à une droite donnée.

Notre tâche est ainsi terminée et nous pensons avoir démontré qu'on peut construire toute la Géométrie euclidienne sans le postulatum et, cela, en nous appuyant uniquement sur le principe d'homogénéité et celui de continuité sans lesquels il n'y a ni grandeur ni espace d'aucune espèce possible, ni aucune science, par conséquent. Nos prémisses sont donc irréfutables.

Nous en avons déduit la possibilité de rapporter une grandeur linéaire à une grandeur quelconque et ce principe est tel que, sans lui, il n'y a certainement pas de Géométrie euclidienne et, comme nous l'avons dit, il est constamment invoqué, directement ou indirectement, tout le long de cette science. On ne peut donc s'en passer, sans faire un cercle vicieux inconscient. C'est pourquoi, il faut le placer au début de cette science et alors tout s'en déduit facilement. C'est, du moins, ce que je pense avoir démontré.

E. WICKERSHEIMER (Paris).

NOUVELLES FORMULES POUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES D'UN QUADRILATÈRE

On peut construire très simplement, au moyen du cercle d'Apollonius, un quadrilatère dont on connaît les quatre côtés a , b , c , d , et la somme des deux angles opposés.

Une autre solution graphique de ce problème, un peu moins simple il est vrai, mais très élégante, repose sur l'emploi d'angles auxiliaires tirés de l'équation

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\sigma - \theta) = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\sigma + \theta),$$