Maur. Godefroy. — La Fonction Gamma; théorie, histoirce bibliographie. Un vol. in-8°, VII-94 p.; prix : fr. 3,50; Gauthier-Villars, Paris, 1901.

Autor(en): **Graf, J.-H.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

le comptant parmi les géomètres de premier ordre, c'est à ses idées philosophiques et à l'universalité de ses travaux que la postérité attacherait surtout sa gloire. Si Leibniz au contraire, abordant plus tôt l'étude des mathématiques, avait pu ravir à son rival l'honneur de leur commune découverte, on n'admirerait pas moins dans le livre des *Principes*, avec la majesté des résultats obtenus, l'incomparable éclat des détails; et en perdant ses droits à l'invention de la méthode qui s'y trouve employée avec tant d'art, Newton resterait placé au rang qu'il occupe aujourd'hui parmi les géomètres : je veux dire à côté d'Archimède et au-dessus de tous les autres ». Une fois cette question de priorité ainsi tranchée, M. Cantor termine en indiquant les progrès que les Bernouilli et le marquis de L'Hopital ont apportés à cette nouvelle branche du calcul.

Jacques Boyer (Paris).

Maur. Godefroy. — **La Fonction Gamma**; théorie, histoire, bibliographie. Un vol. in-8°, VII-94 p.; prix : fr. 3,50; Gauthier-Villars, Paris, 1901.

Dans le premier chapitre (p. 1 à 6) intitulé *Historique*, l'auteur donne un aperçu de la part qu'ont prise Wallis, Stirling, Euler, Gauss, Legendre, Weierstrass, Prym et Hermite, dans le développement de la théorie de la fonction Gamma. L'importance des travaux de Wallis et de Stirling a été mise en lumière par M. J. Eggenberger [1] en 1893. Dans ce travail, qui a échappé à M. Godefroy, l'auteur montre, pour la première fois, comment l'application de la formule sommatoire de Moivre-Stirling a conduit au calcul d'une valeur approchée de $\Gamma(x+1)$. Un autre mémoire eût encore mérité d'être signalé. C'est celui dans lequel M. H. Schenkel [2] fait ressortir l'influence d'Euler. A signaler aussi le mémoire de L. Euler. *De curva hypergeometrica hac æquatione expressa* $y = 1.\ 2.\ 3 \ldots x$. *Nova comm. Academ. scient. imp. Petropol.*, t. XIII, *pro* 1768, *Petropoli*, 1769). Ainsi que le fait M. Godefroy dans son premier chapitre, les travaux de Gauss doivent être traités avant ceux de Legendre. M. Schenkel a montré que le principal mérite du grand géomètre allemand dans le développement de la fonction Gamma consiste en ce qu'il a établi la théorie sur la notion de limite d'un produit, et qu'il a fait voir que cette fonction et l'intégrale eulérienne de première espèce qui lui correspond ont une signification précise, non seulement pour des valeurs entières et positives de la variable, mais encore pour des valeurs fractionnaires ou imaginaires. Si nous insistons tout particulièrement sur la partie historique, ce dont M. Godefroy voudra bien nous excuser, c'est que cette partie nous a toujours vivement intéressé.

Bien que la méthode de Legendre ait été adoptée par la plupart des auteurs, si on l'envisage au point de vue de la simplicité des prémisses et de la déduction logique, elle doit être placée après celle de Gauss. C'est ce qui ressort clairement du travail de M. Schenkel, qui poursuit un but analogue à celui de M. Godefroy. Ils étudient tous deux la marche de la fonction Gamma et en donnent une représentation graphique.

---

(1) J. Eggenberger, *Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals*, Bern, K.-J. Wyss, 1893.

(2) H. Schenkel, *Kritisch-historische Untersuchung ueber die Theorie der Gammafunktion und Euler'schen Integrals*, A. Gull, Uster-Zurich, 1894.

M. Godefroy insiste, à juste titre, sur l'influence des recherches de WEIERSTRASS relatives à la théorie des *facultés (ou factorielles) analytiques* (*Theorie der analytischen Facultäten*). Toutefois 'l y a lieu de signaler aussi le fondateur de cette théorie, CH. KRAMP [1] qui a établi les propriétés fondamentales des factorielles numériques, ainsi que nous avons eu l'occasion [2] de le montrer.

Ainsi, tout en tenant compte de l'intention de l'auteur de ne donner qu'un court aperçu historique, nous estimons, par le fait des omissions que nous venons de mentionner, que ce premier chapitre ne donne qu'une idée imparfaite du développement historique de la fonction Gamma.

Le chapitre II (p. 7 à 28) est consacré à l'*Etude générale de la fonction Gamma*. Prenant comme point de départ la définition de Gauss

$$\pi(x) = \lim_{n=\infty} n^x \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)},$$

l'auteur en déduit, d'une manière à la fois claire et simple, la somme connue sous le nom de *constante d'Euler;* puis il établit la formule de Weierstrass et démontre que l'inverse de la fonction Gamma est développable en une série entière de rayon de convergence infini. Vient ensuite la relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (première propriété de la fonction Gamma d'après Legendre), examinée pour des valeurs entières positives ou négatives et pour des valeurs imaginaires; puis, la détermination du module de $\Gamma(\alpha+\beta i)$, du résidu de $\Gamma(x)$, et de la limite, pour $n=\infty$, de $\frac{1}{n^x}\,\frac{\Gamma(x+n)}{1.2.3\ldots(n-1)}$. L'auteur applique les résultats obtenus à l'étude de la série de Stirling et à la convergence de la série hypergéométrique, applications qui le conduisent à un théorème dû à M. APPELL.

Considérant ensuite les expressions

$$e\mathrm{P}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \ldots$$

et

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\ldots(x+n-1)\,\Gamma(x),$$

l'auteur désigne sous le nom de *fonction de Bourguet* la somme de la série

$$e\frac{\mathrm{P}(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x+1)} + \frac{1}{\Gamma(x+2)} + \frac{1}{\Gamma(x+3)} + \ldots \quad = \mathrm{T}(x);$$

il en étudie les propriétés ainsi que celles de la fonction $\mathrm{P}(x)$.

Les *propriétés de la fonction Gamma* font l'objet du ch. III. La méthode suivie s'écarte de celle de Legendre. L'auteur examine d'abord la *relation des compléments* $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, due à Euler (3e propriété fondamentale de la fonction de Legendre); puis la formule

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\,\Gamma(2x),$$

(1) CH. KRAMP, *Analyse des réfractions astronomiques*, chap. III, Strasbourg, 1799.

(2) J.-H. GRAF, *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale*, Wyss, Berne, 1895.

(6e propriété fondamentale de la fonction de Legendre) que nous avons désigné (*loc. cit.*, p. 21) sous le nom de formule de l'argument double ; elle n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la relation générale, due à Gauss,

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{-mx+\frac{1}{2}}\Gamma(mx),$$

ainsi que le fait remarquer M. Godefroy. Le chapitre se termine par l'étude de la *formule de Mellin* et de la relation entre la fonction Gamma et la série hypergéométrique. Je me permets de signaler à ce sujet le travail de thèse, actuellement sous presse, qu'un de mes élèves, M. L. Jecklin, consacre au développement de la théorie de la série hypergéométrique jusqu'à Kummer.

Le chapitre IV (p. 39-49) traité de la *fonction de Binet*.

$$\varpi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\left(x+\frac{2n+1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right].$$

On y trouve plusieurs formules dues à Binet et la *formule* de GUDERMANN

$$\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\varpi(x).$$

Ces deux relations jouent un rôle important dans le développement de log $\Gamma(x)$.

Le chapitre V (p. 50-65) a pour titre les *Fonctions* $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$,

$$\Phi(x)=\frac{d\log\Gamma(x)}{dx},\qquad \Psi(x)=\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2},$$

qui possèdent les mêmes propriétés fondamentales que la fonction Gamma. L'auteur présente, entre autres, une étude très intéressante de la différence $\Phi(x+a)-\Phi(x)$; il détermine $\Phi(x)$ pour une valeur rationnelle de x, et donne, à titre d'application la courbe figurative de la fonction Gamma.

Dans la chapitre VI (p. 66 à 73) sont étudiés les *développements en séries entières* des fonctions $\log\Gamma(1+x)$, $\Gamma(1+x)$, $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$, P et Ω de $(1+x)$ et Φ et Ψ de $(1+x)$.

Le dernier chapitre contient les applications des fonctions $\Gamma(x)$ et $\Phi(x)$ indiquées par M. Appell et la résolution des équations de Lindhagen et de Crelle.

Nous terminons en félicitant M. Godefroy d'être parvenu à présenter les notions fondamentales de la théorie de la fonction Gamma dans un espace relativement restreint et sous une forme aussi simple que claire. Tous ceux qui s'occupent de cette intéressante fonction trouveront dans ce livre des indications qui leur seront très précieuses.

J.-H. GRAF (Berne).