

BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

BIBLIOGRAPHIE

F. BOHNERT. — **Elementare Stereometrie**. — Un vol. cartonné, 183 p., *Collection Schubert*; prix : Mk. 2,40 ; G.-F. Goeschel, Leipzig, 1902.

Nous recommandons cet ouvrage à tous ceux qui enseignent la *Géométrie dans l'Espace*. Ils y trouveront, présentés sous une forme à la fois simple et claire, un certain nombre de problèmes, qui, malgré leur utilité immédiate, n'ont pas encore reçu, dans l'enseignement secondaire supérieur, la place qu'ils méritent.

L'auteur divise son ouvrage en deux parties. Dans la première, après avoir étudié les théorèmes concernant la droite et le plan et qu'il a réunis sous le titre de *Stéréométrie de position*, il passe à l'étude des angles polyèdres, puis il examine le calcul du volume des solides géométriques les plus simples en se basant sur le principe de Cavalieri. Sont encore étudiés les propriétés les plus importantes et les problèmes fondamentaux concernant la sphère et les polyèdres réguliers.

La seconde partie contient le calcul du volume des solides géométriques groupés d'après la classification de HEINZE, puis les règles de SIMPSON et de GULDIN et leurs applications. L'ouvrage se termine par un court aperçu des sections coniques envisagées comme sections planes d'un cône de révolution.

H. F.

J. BOUSSINESQ. — **Théorie analytique de la chaleur** mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome 1^{er}. *Problèmes généraux*. — Un vol. gr. in-8°, XXVII-333 p. ; prix : 10 francs ; Gauthier-Villars, Paris, 1902.

Au début du XIX^e siècle, Fourier, en découvrant la manière de mettre en équation les problèmes de la théorie analytique de la chaleur et la méthode d'intégration la plus convenable, a fondé l'une des branches les plus simples de la Physique mathématique.

Fourier et tous ceux qui l'ont suivi ont assimilé la chaleur à une substance indestructible sans cesse en mouvement pour passer des corps chauds aux corps froids ; et il a encore envisagé les corps solides comme étant composés d'un nombre immense de molécules, maintenues à d'imperceptibles distances et à des températures diverses et qui se céderaient les unes aux autres de la chaleur suivant la loi de Newton. C'est l'hypothèse du *rayonnement particulaire*. Les principes de la théorie mécanique de la chaleur ont montré, au contraire, que la chaleur est de la nature d'un travail ; c'est donc en partie de l'énergie actuelle, ou cinétique, du mouvement vibratoire invisible des molécules des corps, et en partie de l'énergie potentielle développée par les forces en jeu dans ce mouvement.

Dans cette nouvelle manière d'envisager la chaleur, chaque molécule, dans un instant infiniment petit de son mouvement vibratoire, affectera les phases et les vitesses les plus diverses ; la température d'une molécule, qui est quelque chose d'indépendant de ces phases, ne peut avoir une valeur distincte pour chaque point matériel et il n'est plus possible d'attribuer une température propre à chaque molécule ; l'hypothèse du rayonnement particulière ne saurait plus subsister.

M. Boussinesq s'est proposé d'exposer, dans un traité, dont le premier volume seulement a paru, la théorie de la propagation de la chaleur en se fondant sur les principes de la thermodynamique.

Il faut avant tout préciser la signification de quelques expressions ; définir le flux de chaleur, la température d'un corps, etc.

Les molécules des corps sont animées de mouvements visibles quelconques et, de plus, soumises à des vifs mouvements vibratoires irréguliers, mais invisibles, en tant que mouvements, d'amplitude très faibles et de périodes extrêmement courtes autour d'une position moyenne. L'énergie d'un petit élément de volume, à cause de la non-participation des centres de gravité des particules au mouvement invisible, se compose seulement de l'énergie du mouvement visible et de l'énergie (évaluée en calories) du mouvement invisible ou calorifique, dite *chaleur sensible* du corps. Elle pourra se rapporter à l'unité de volume.

Envisageons l'énergie potentielle : la partie qui correspond aux actions mutuelles, qui s'exercent à des distances perceptibles, est constante ; la partie qui correspond aux actions moléculaires (énergie potentielle interne) s'exprime par simple addition des valeurs qu'elle a dans les divers éléments de volume du corps considérés séparément. Elle comprend l'énergie purement élastique et celle dépendant de l'agitation calorifique. C'est la *chaleur potentielle*, qui pourra aussi se rapporter à l'unité de volume.

La somme de la chaleur sensible et de la chaleur potentielle, par unité de volume, sera la *chaleur totale*.

Le travail élémentaire des forces extérieures comprend le travail des pressions ou des actions physiques exercées à la surface du corps dans son mouvement visible et le travail de ces mêmes actions dans le mouvement calorifique.

Ce dernier est, par définition, le *flux de chaleur* entré dans le corps par les divers éléments de sa surface dans l'instant dt .

Si les mouvements visibles sont très faibles, l'énergie actuelle ou potentielle ne comprend à très peu près que la partie calorifique. Alors le principe de la conservation de l'énergie nous donnera, en commun avec l'ancienne théorie, les principes fondamentaux de l'égalité entre les flux de chaleur qui pénètrent dans le corps par sa surface et l'accroissement de la chaleur totale d'un instant à l'autre ; et de l'égalité entre la chaleur gagnée par un corps à travers une partie quelconque de sa surface et celle perdue par la matière extérieure contiguë.

Mais avant d'en développer les conséquences, M. Boussinesq veut approfondir la nature de cette agitation moléculaire invisible et très rapide qui constitue la chaleur ; pour cela il examine, d'une manière qui n'est pas la chose la moins originale de son livre, les phénomènes de la chaleur rayonnante et de la lumière dans l'éther libre.

Qu'est-ce que l'éther, et quelles propriétés devons-nous lui attribuer ?

La résistance extrêmement faible que l'éther oppose aux mouvements des corps célestes nous oblige à le considérer comme un fluide d'une extrême mobilité et d'une densité presque nulle. Lord Kelvin a calculé que la densité de l'éther n'est pas moindre que 10^{-20} de celle de l'eau, et peut atteindre 10^{-15} ou un peu plus.

Mais cette fluidité est-elle conciliable avec la transversalité des vibrations qui constituent la lumière ou la chaleur, puisque les fluides, doués seulement de l'élasticité de volume, ne peuvent pas transmettre des vibrations transversales comme les solides ?

L'excessive brièveté des vibrations lumineuses, qui se succèdent de près d'un quadrillion par seconde, explique l'apparente anomalie. En effet, dès qu'un liquide ou un gaz est agité, sa fluidité est détruite ; des pressions obliques, comme dans un corps isotrope déformé, s'y développent. Les liquides et les gaz, grâce à une évolution imperceptible et appropriée des molécules, reforment sans cesse d'eux-mêmes la parité de constitution ; mais cela exige un certain temps, et cette évolution n'est plus possible lorsque les molécules doivent exécuter plus d'un trillion d'imperceptibles vibrations par seconde. Donc, pour ces vibrations, l'éther se comporte comme un solide isotrope. Mais il y a plus : l'uniformité de la propagation des mouvements ondulatoires exige que le milieu où ils se transmettent se comporte comme une masse déformable et continue. On doit encore admettre que les intervalles séparant les molécules d'éther et les distances auxquelles s'exercent les actions en jeu dans le mouvement vibratoire, se réduisent à des fractions extrêmement faibles de la longueur d'ondulation λ ; sans cela les équations aux dérivées partielles de la propagation cesseraient d'être homogènes comme le supposent les lois simples de la physique et elles ne seraient non plus du second ordre.

Le phénomène de la dispersion dans tous les milieux où l'éther est parsemé de molécules pondérables, prouve au contraire qu'il n'en est pas de même de la matière pondérable.

Dans toute théorie de la dispersion, on doit découper dans les corps transparents de petits volumes constitués de même à côté les uns des autres et de dimensions comparables à λ . Alors les variations des déplacements vibratoires sont des différences finies ; leur développement en série de Taylor introduit dans les équations du mouvement des dérivées d'ordre supérieur ; les équations ne sont plus homogènes, ce qui entraîne la variabilité de la vitesse de propagation avec λ , c'est-à-dire la dispersion.

Donc, malgré l'extrême faiblesse de sa densité, l'éther renferme par unité de volume incomparablement plus de particules que n'importe quelle matière pondérable.

Cela exige que nous nous représentions l'éther comme une poussière atomique de points matériels presque sans masse, assez petits et assez rapprochés pour qu'on puisse le considérer comme un fluide continu. Son action sur une molécule pondérable en repos ou en mouvement restera toujours peu sensible pour la mouvoir ou pour la retenir ; il sera très élastique pour l'énorme intensité des actions atomiques, à la manière d'un solide isotrope ; il pourra propager les vibrations transversales qui constituent la lumière ou la chaleur rayonnante avec une prodigieuse vitesse, grâce à l'extrême faiblesse de sa densité qui le rend presque dépourvu d'inertie ; mais il ne pourra transmettre des ondes à vibrations longitudinales, surtout si elles sont d'am-

plitude appréciable, comme celles qui constituent le son dans l'air ou dans l'eau.

L'équation qui régit, à une première approximation, la propagation des vibrations transversales de l'éther et dont M. Boussinesq donne aussi une démonstration directe sans rien emprunter à la théorie de l'élasticité, montre *a posteriori* les propriétés déjà admises.

Qu'arrivera-t-il lorsque les ondulations lumineuses ou calorifiques propagées dans l'éther libre arrivent à la surface d'un corps et pénètrent dans ses espaces intermoléculaires ?

L'hypothèse la plus naturelle est de supposer l'éther où baignent les molécules des corps solides ayant la même densité et, par suite, la même élasticité de l'éther libre de même que l'air ou l'eau ne subissent aucune modification appréciable par le fait des poussières qui s'y trouvent disséminées. Les molécules du corps, énormément plus denses que l'éther, et qu'on pourra considérer comme absolument fixes, opposeront une résistance aux vibrations de l'éther lorsqu'il sera animé par une série d'ondes. La résistance opposée par des corps fixes à un fluide qui les entoure et dont les mouvements sont à courte période, se compose de deux parties dont l'une est proportionnelle à l'accélération, l'autre à la vitesse du fluide. Si un projectile traverse l'air ou l'eau, c'est cette seconde partie qui est prépondérante ; tandis que dans le mouvement d'un pendule de faible longueur, c'est la première et sa mise en compte dans l'équation du mouvement ne produit qu'un accroissement fictif de la masse. Pour l'éther, l'accélération

absolue moyenne est de l'ordre de $\frac{1}{\tau^2}$, tandis que la vitesse est de l'ordre de $\frac{1}{\tau}$, si τ est la période du mouvement vibratoire ; la résistance est donc

proportionnelle à l'accélération. Les équations du mouvement ondulatoire de l'éther d'un corps isotrope transparent ou diathermane se déduisent aussitôt, et l'on arrive, comme pour le pendule, à la conclusion que la résistance des molécules pondérables portera fictivement la densité ρ de l'éther à la valeur $\rho(1 + \alpha)$, et de là se motive, d'une manière toute naturelle, l'hypothèse de Fresnel des inégales densités de l'éther dans les divers corps transparents, malgré la constance de son élasticité. La longueur d'ondulation est réduite dans le rapport de $\sqrt{1 + \alpha}$ à 1, et comme elle est encore très grande par rapport aux intervalles moléculaires, α ne doit pas être trop grand ; c'est une première condition pour la transparence ou diathermanéité d'un corps. Une autre condition se trouve en considérant que les molécules pondérables, dans ces corps, n'ont aucune action mutuelle ; c'est-à-dire que chaque molécule se comporte comme si elle était soustraite à l'action des autres ; alors la matière pondérable ne reçoit de l'éther que des quantités absolument négligeables d'énergie actuelle ou de chaleur sensible ; c'est la deuxième condition.

Si ces deux conditions ne se vérifient pas, le corps acquiert opacité ou athermanéité ; le mouvement cesse d'être ondulatoire et devient une agitation irrégulière. Les équations du mouvement ne sont plus linéaires, homogènes et à coefficients constants ; le fait capital de la composition et de la simple superposition des déplacements, leur indépendance mutuelle, cessent d'avoir lieu. L'agitation calorifique est rebelle à notre analyse. Elle est encore possible dans les mêmes hypothèses des corps transparents, c'est-à-dire si le

rayon d'activité des actions moléculaires est assez court et les molécules pondérables assez rapprochées, pour que l'énergie actuelle puisse se communiquer largement à ces molécules sans perdre son caractère ondulatoire.

L'intensité de cette agitation irrégulière est mesurée par l'énergie vibratoire totale, car on ne peut parler non plus, comme pour le son et la lumière, de la hauteur et de la couleur. Voyons si elle produit quelque effet sensible.

Si dans une particule en repos les molécules viennent à osciller calorifiquement, nous aurons des rapprochements et des écartements entre les molécules, qui produiront des répulsions et des attractions. Mais les premières, qui assurent l'impénétrabilité, sont beaucoup plus intenses que les secondes, qui assurent la cohésion ; alors il y aura, sur tout élément plan, un excédent des répulsions et une pression notable intérieure qui produira un mouvement sensible d'expansion, c'est-à-dire une dilatation. Cette dilatation, qui donne une mesure de l'intensité de l'énergie, n'est pas aisément mesurable dans tous les corps ; on ne pourrait même comparer que les intensités d'un même corps sans avoir une échelle unique. La loi physique de l'équilibre de température, par laquelle un corps communique une partie de sa chaleur à ceux qui le touchent et qui sont à l'état de repos interne, jusqu'à ce que l'agitation de ceux-ci ait atteint une certaine limite, permet de faire servir un seul corps pour établir les degrés d'agitation calorifique des corps. En effet, si les deux corps sont de même nature, cette limite, pour le corps primitivement froid, n'est autre chose que l'état du corps chaud à l'état d'équilibre : alors on pourra comparer les degrés d'agitation de tous les corps de même nature avec ceux d'un autre corps choisi à volonté (thermomètre). La loi expérimentale que deux corps en équilibre de chaleur avec un troisième, le sont entre eux, pourra faire adopter pour tous les corps un même thermomètre ou une même échelle. Chaque degré de cette échelle est une *température*.

Dans chaque question le zéro sera déterminé par la température la plus importante ; l'excédent u sur celle-là de chaque température effective n'aura que des valeurs petites par rapport à la température absolue. Par conséquent la chaleur totale γ par unité de volume sera de la forme

$$\gamma = A + Cu,$$

A étant la valeur de γ à la température absolue du zéro choisi ; C la chaleur spécifique du corps par unité de volume. La variation de la chaleur totale, produite par les changements de température survenus pendant dt , aura pour expression

$$dt \int C \frac{du}{dt} d\omega = d \int \gamma d\omega$$

et, en vertu de l'équation des forces vives, elle sera égale au flux à travers la surface du corps.

Mais pour exprimer le flux en fonction de u , afin d'obtenir l'équation aux dérivées partielles de la propagation de la chaleur, encore un pas est à faire. Avant tout la propriété que la chaleur totale cédée à un élément de volume par la matière environnante égale la somme algébrique des flux qui traversent ses diverses faces en venant du dehors, presque évidente dans l'ancienne théorie, n'est pas moins vraie ; c'est ce que prouve un raisonnement bien

simple. Lorsqu'on a un état normal, c'est-à-dire si $\frac{du}{dt}$ est fini, la somme algébrique des flux de chaleur venus du dehors à travers les diverses faces d'un élément de volume, est comme infiniment petite comparativement à leur somme arithmétique. C'est le principe de la *quasi-neutralisation* des flux de chaleur.

Deux applications capitales sont les suivantes :

La continuité des flux, pour unité d'aire, relatifs aux éléments plans qui se déplacent dans le corps parallèlement à eux-mêmes.

L'égalité des flux à travers les deux faces de la couche séparative de deux corps ou milieux contigus.

Dès lors on peut faire les considérations bien connues de Cauchy qui introduisent les flux principaux relatifs aux axes coordonnés, le flux maximum ou courant de chaleur, etc.

M. Boussinesq, en poursuivant les recherches de Lamé et Duhamel, a pu obtenir dans la représentation géométrique de la théorie des flux, tout en restant dans le cas le plus général, beaucoup de simplicité et d'élégance.

Les composantes des flux suivant les axes sont des fonctions linéaires des trois dérivées de la température u ; on a donc en général neuf coefficients de conductibilité : six indirects et trois directs positifs. Ils se réduisent à trois dans les corps à contexture symétrique, et à un seulement dans les corps isotropes. Le flux maximum ou courant de chaleur, et le flux qui traverse l'élément plan isotherme $u = \cos t$ en venant du côté de la normale positive (pente de température) ne tiennent pas au choix des axes. Ils donnent lieu à considérer deux coefficients de conductibilité ; l'un suivant le courant, l'autre suivant la pente de température. La représentation de ce dernier se fait par l'ellipsoïde principal de Lamé. Pour les axes de cet ellipsoïde, les six conductibilités indirectes sont deux à deux égales et de signes contraires. En particulier, les milieux où ces six conductibilités sont égales deux à deux, se comportent, au point de vue de la propagation de la chaleur comme s'ils étaient symétriques. Dans ce cas il existe un potentiel des flux et l'ellipsoïde de Lamé et son réciproque suffisent, comme on sait, à la représentation de la conductibilité suivant la ligne de pente de température et la ligne du courant. Mais les constructions de Lamé ne suffisent plus dans le cas d'une contexture non symétrique. Alors la considération d'un autre ellipsoïde dont les rayons vecteurs représentent, par leurs carrés, les conductibilités des courants qui ont leur direction (ellipsoïde de conductibilité), permet de donner, de la manière la plus élégante, la construction générale des courants de chaleur, étant donnée, dans une particule, la disposition des éléments plans isothermes, et inversement. Ces constructions se simplifient dans les barres, les plaques minces et les cristaux

On a maintenant tous les éléments pour la recherche, selon les méthodes usuelles, des équations de la propagation de la chaleur dans les corps athermanes sans source intérieure ou dans les corps diathermanes.

L'auteur en effet déduit les équations indéfinies et à la surface dans divers cas d'échauffement par rayonnement, par convection, etc. Il aborde même la question si épineuse de savoir si les équations de la propagation déterminent les températures successives, c'est-à-dire la question de l'existence d'une solution, au point de vue de l'analyse, dans les problèmes de la théorie analytique de la chaleur. L'essai de démonstration esquissé par l'auteur,

emprunte nécessairement encore quelque chose à l'expérience ; mais M. Boussinesq, très justement, observe que :

« Nous sommes loin encore de l'époque (si elle arrive jamais) où la Physique mathématique pourra ne faire appel à l'observation que pour poser les premiers principes de chacune de ses branches et où elle se dispensera de baser purement et simplement sur l'expérience, dans ses démonstrations, le *postulatum* de la variation graduelle de toutes les fonctions qu'elle emploie. »

M. Boussinesq ne veut pas entrer dans le détail des recherches récentes de MM. Poincaré, Stekloff et Le Roy.

En revanche, on peut démontrer rigoureusement l'unité de la solution et aussi que tout problème de la théorie de la chaleur se ramène à deux problèmes fondamentaux : celui du refroidissement simple et celui des températures stationnaires.

Dans le problème général du refroidissement, quelle sera la forme générale de l'intégrale ? Si l'on substitue à l'ensemble des corps un nombre très grand de points fixes, on obtient un système d'équations linéaires du premier ordre, dont la forme de l'intégrale est connue ; alors, par simple induction, on est conduit à l'expression générale de la température et qui se compose par addition de solutions simples d'une forme connue. C'est bien ce qu'il faut demander directement aux équations du problème. Dans les corps à conformation symétrique, les solutions simples ne contiennent aucun facteur trigonométrique ou algébrique en t ; elles sont donc de la forme $e^{-mt}u$. Ces exponentielles sont décroissantes et m satisfait à une équation caractéristique à racines toutes réelles. La première solution simple correspond à la plus petite racine m_0 . M. Picard, dans un cas particulier, a établi que cette racine est simple ; c'est ce qui arrive encore dans tous les cas connus ; il ne lui correspond donc qu'une seule fonction u . Qu'arrivera-t-il si le temps croît au point de rendre e^{-mt} très petit ? La série formée par les solutions simples, se réduira presque au premier terme

$$c_0 e^{-m_0 t} u_0,$$

qui conserve un même signe dans toute l'étendue du système, comme l'a démontré M. Poincaré.

Ce premier terme exprimera donc la température bien avant qu'elle s'annule physiquement. Son mode de distribution aux divers points, exprimé par u_0 est invariable, indépendant de l'état initial et déterminé uniquement par la constitution géométrique et physique du corps. Non seulement, donc, l'état final ($u = 0$) est indépendant des irrégularités de l'état initial, mais le phénomène s'harmonise aussi dans sa marche, au point de se débarrasser des inégalités accidentelles durant une longue période dès qu'il a atteint ce qu'on appelle, suivant Fourier, son *état pénultième*.

M. Boussinesq, enfin, n'expose pas seulement des théories générales ; il les applique aussi au beau problème de Fourier de la température du sol terrestre, à l'armille, à l'étude comparée du refroidissement de la sphère et du cube, etc.

Je ne me flatte pas d'avoir mis en évidence toutes les beautés du livre de M. Boussinesq, dans cet exposé nécessairement sommaire.

M. Boussinesq, dans l'exposé de chaque question, veut être, avant tout, physicien ; dans les solutions finales, sans de grandes complications de for-

mules, il cherche à lire les grandes lois, suivant le modèle à jamais célèbre de l'œuvre immortelle de Fourier. Il essaie d'expliquer la nature intime des équations différentielles du problème à traiter, il soumet à une discussion approfondie toutes les hypothèses et, chose tout à fait capitale, les développements analytiques lui sont presque toujours suggérés par des considérations mécaniques ou physiques.

Ce sont des qualités que nous voudrions trouver dans tous les traités de Physique mathématique et qui rendent très instructive la lecture de l'ouvrage si éminemment philosophique de M. Boussinesq.

R. MARCOLONGO (Messine).

ROB. FRICKE. — **Hauptsätze der Differential-und Integral-Rechnung**, zusammengestellt als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. Dritte umgearbeitete Auflage. — Un vol. in-8° ; 218 pages ; prix : Mk. 5 ; Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1902.

Ce volume contient le *résumé des éléments de Calcul différentiel et intégral* indispensables aux techniciens. En le rédigeant, M. Fricke a rendu un grand service à une catégorie importante d'étudiants. Nous en voyons la preuve dans la rapidité avec laquelle les deux premières éditions ont été enlevées.

Il va de soi que, bien qu'il soit destiné aux élèves des écoles techniques, ce volume n'a pas pour but de remplacer un traité. Suivant le but que s'est proposé l'auteur, ce résumé est destiné, avant tout, à permettre aux étudiants de suivre plus facilement le cours de Calcul différentiel et intégral et à leur donner un canevas pour le travail de révision.

Voici les titres des cinq sections qui constituent ce volume : Introduction. Les bases du Calcul différentiel. Application du Calcul différentiel. Bases et applications du Calcul intégral. Fonctions de plusieurs variables indépendantes. Introduction à la théorie des opérations différentielles. Appendice : Nombres complexes et fonctions à une variable complexe. H. F.

NETTO (Dr Eug.). — **Lehrbuch der Combinatorik**. — Un vol. cart. in-8°, 260 p. ; prix : Mk. 9. — B.-G. Teubner, Leipzig, 1902.

Depuis la publication de l'ouvrage d'OETTINGER, *Lehre von den Combinationen*, 1837, il n'avait paru aucune monographie sur ce même sujet. L'analyse combinatoire s'est pourtant enrichie d'un grand nombre d'importants travaux ; de nouveaux problèmes ont été soulevés, tandis que certains problèmes anciens ont pu être généralisés. Ces matériaux, disséminés dans un grand nombre de revues, viennent d'être réunis et groupés d'une façon méthodique par M. NETTO. Il faut reconnaître que cet ouvrage répond à un réel besoin et que nul n'était mieux désigné pour entreprendre un travail aussi aride que le savant professeur de Giessen.

M. Netto présente l'analyse combinatoire comme une science indépendante ayant à résoudre des problèmes qui lui sont propres. Son exposé ne sera pas seulement le bienvenu auprès de ceux qui s'intéressent spécialement à ce domaine, il rendra également de grands services à tous les mathématiciens, car aujourd'hui les notions de l'analyse combinatoire interviennent dans les domaines les plus divers.

L'ouvrage est divisé en treize chapitres. Le premier traite des opérations

combinatoires ordinaires telles qu'on les trouve dans les manuels d'Algèbre ; on y rencontre cependant quelques problèmes plus généraux, que l'on n'a pas coutume de rencontrer dans les ouvrages élémentaires. A ces notions se rattachent, dans le deuxième chapitre, le théorème du binôme et ses extensions dues à Abel et à Burg et le théorème du polynôme.

Dans le chapitre III, consacré aux complexions avec ordre limité, sont traités un certain nombre de problèmes célèbres tels que le *Proteus-Verse*, corrigé par M. Netto, les problèmes des déterminants de Weyrauch et de Longchamps, le problème de M. Cantor-Baur, etc.

L'auteur présente ensuite (chap. IV) la théorie de l'*inversion*, à laquelle vient se rattacher le théorème de Metzler, et la *théorie des séquences*, d'après les travaux de M. Désiré André.

Les trois chapitres suivants traitent des combinaisons et des arrangements relatifs à une somme donnée et des propriétés relatives à la *décomposition d'un nombre en m addendes* satisfaisant à des conditions données. La résolution de ces problèmes repose, en grande partie, sur les travaux de Sylvestre ; elle donne lieu à une série de beaux théorèmes et exercices qui se rattachent plus particulièrement à la théorie des nombres.

Le problème analogue de la *décomposition d'un nombre en m facteurs* est examiné dans le chapitre suivant ; les développements analytiques auxquels il donne lieu fournissent d'intéressants théorèmes et se trouvent appliqués aux problèmes de Möbius et de Scherk.

L'auteur étudie ensuite (chap. IX) les autres opérations combinatoires ; il examine, entre autres, les permutations circulaires, et, dans les problèmes, ceux de Catalan et de Schröder. Puis vient une étude approfondie du problème de Steiner et Kirkmann relatif à la formation de groupes de 3 éléments pris dans n éléments donnés, les groupes étant tels que tout couple de deux éléments figure, et une fois seulement, dans un groupe.

Dans le chapitre suivant, M. Netto présente les principales *applications* de l'analyse combinatoire, puis il groupe, dans le dernier chapitre, les formules fondamentales étudiées dans ce livre.

Dans ce domaine des mathématiques il reste encore bien des problèmes à résoudre ; l'auteur en signale un certain nombre en les accompagnant des indications bibliographiques qui permettront au lecteur de s'orienter sur l'état actuel des recherches.

E. GUBLER (Zurich).

Errata. — M. E. BORTOLOTTI nous signale quelques fautes d'impression qui se sont glissées dans son compte rendu bibliographique des *Leçons sur les séries à termes positifs* de M. E. BOREL (voir le précédent numéro, p. 226-228).

Pages 227	ligne 17	au lieu de	$\omega^2 e \omega^{-1}$	lire	$\omega^{-2} e \omega^{-1}$
» 228	» 21	»	ε^m	»	ε_m
»	» 24	»	P	»	$P = \frac{1}{\lg(\lg n)}$
»	» 25	»	$\frac{e}{e^{\lg(\lg n)} - 1}$	»	$\frac{e}{\frac{1}{\lg(\lg n)}}$