ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT D'UN PLAN INVARIABLE Σ PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2.

Autor(en): **Kraft, Ferdinand**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6623

ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN PLAN INVARIABLE Σ PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2.

I. — *Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.*

§ 1. — Les déplacements de trois ou d'un plus grand nombre de points d'une ligne droite σ qui, d'une manière quelconque, passe d'une position σ_1 à une position σ_2 ne sont pas indépendants; nous allons montrer qu'il y a une relation entre eux. Il existe entre les déplacements des points d'un système Σ à trois dimensions quand il est transporté d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position quelconque Σ_2, des relations semblables valables de manière générale et que nous développerons d'abord.

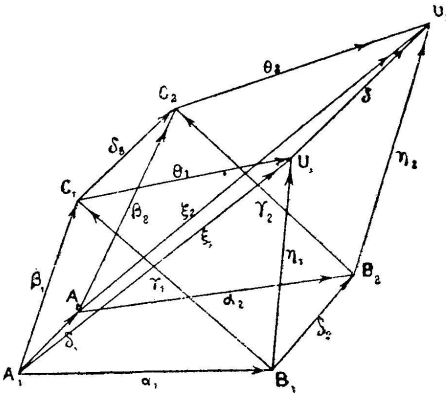

Fig. 1.

Soient A, B, C et U quatre points d'un système invariable de l'espace formant les sommets d'une pyramide arbitraire, de sorte que A, B, C, U; A_1, B_1,C_1,U_1 et A_2, B_2, C_2, U_2 sont les pyramides congruentes homologues de Σ, Σ_1 et Σ_2.

Nous posons (fig. 1).

$$\overline{A_1B_1} = \alpha_1,\ \overline{A_1C_1} = \beta_1,\ \overline{B_1C_1} = \gamma_1,\ \overline{A_1U_1} = \xi_1,\ \overline{B_1U_1} = \eta_1,\ \overline{C_1U_1} = \theta_1,$$
$$\overline{A_2B_2} = \alpha_2,\ \overline{A_2C_2} = \beta_2,\ \overline{B_2C_2} = \gamma_2,\ \overline{A_2U_2} = \xi_2,\ \overline{B_2U_2} = \eta_2,\ \overline{C_2U_2} = \theta_2,$$
$$\overline{A_1A_2} = \delta_1,\ \overline{B_1B_2} = \delta_2,\ \overline{C_1C_2} = \delta_3,\ \overline{U_1U_2} = \delta.$$

Comme Σ_1 et Σ_2 sont des systèmes congruents, le produit intérieur de deux vecteurs de Σ_1 est égal au produit intérieur des vecteurs homologues de Σ_2.

Donc, on peut écrire

$$\alpha_1 | \beta_1 = \alpha_2 | \beta_2 ;$$

mais nous avons

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_\alpha = \alpha_1 + \delta_2 - \delta_1,$$
$$\beta_2 = \beta_1 + \delta_\beta = \beta_1 + \delta_3 - \delta_1,$$

et aussi avec cela

$$\alpha_1 | (\beta_2 - \delta_\beta) = (\alpha_1 + \delta_\alpha) | \beta_2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0,$$

ou

$$\alpha_1 | (\delta_3 - \delta_1) + \beta_2 | (\delta_2 - \delta_1) = 0,$$

ou enfin

$$\alpha_1 | \delta_3 + \beta_2 | \delta_2 = (\alpha_1 + \beta_2) | \delta_1 .$$

De même nous trouvons

$$\alpha_2 | \delta_\beta + \beta_1 | \delta_\alpha = 0,$$
$$\alpha_2 | \delta_3 + \beta_1 | \delta_2 = (\alpha_2 + \beta_1) | \delta_1 .$$

De plus on a la relation

$$\xi_1 | \gamma_1 = \xi_2 | \gamma_2 ;$$

mais nous avons

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \delta_\gamma = \gamma_2 - \delta_3 + \delta_2, \qquad \xi_2 = \xi_1 + \delta_\xi = \xi_1 + \delta - \delta_1$$

de sorte que

$$\xi_1 | (\gamma_2 - \delta_\gamma) = (\xi_1 + \delta_\xi) | \gamma_2,$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 | \delta_\gamma + \gamma_2 | \delta_\xi = 0,$$

ou

$$\xi_1 | (\delta_3 - \delta_2) + \gamma_2 | (\delta - \delta_1) = 0$$

ou enfin

$$\xi_1 | \delta_3 + \gamma_2 | \delta = \xi_1 | \delta_2 + \gamma_2 | \delta_1 .$$

De manière semblable s'obtiennent les relations

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 \mid \partial_\xi + \xi_2 \mid \partial_\gamma = 0,\\
&\gamma_1 \mid \partial + \xi_2 \mid \partial_3 = \gamma_1 \mid \partial_1 + \xi_2 \mid \partial_2 ;\\
&\beta_1 \mid \partial_\xi + \xi_2 \mid \partial_\beta = 0,\\
&\beta_1 \mid \partial + \xi_2 \mid \partial_3 = \beta_1 \mid \partial_2 + \xi_2 \mid \partial_1 ;\\
&\alpha_1 \mid \partial_\theta + \theta_2 \mid \partial_\alpha = 0,\\
&\alpha_1 \mid \partial + \theta_2 \mid \partial_2 = \alpha_1 \mid \partial_3 + \theta_2 \mid \partial_1 .
\end{aligned}
$$

En outre, pour les vecteurs du système on a les relations

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \partial_\alpha = 0, \qquad (\beta_1 + \beta_2) \mid \partial_\beta = 0, \ldots$$

et aussi par suite

$$(2\alpha_1 + \partial_\alpha) \mid \partial_\alpha = 0, \qquad (2\beta_1 + \partial_\beta) \mid \partial_\beta = 0, \ldots$$

ou

$$2\alpha_1 \mid \partial_\alpha + \partial_\alpha^2 = 0, \qquad 2\beta_1 \mid \partial_\beta + \partial_\beta^2 = 0, \ldots$$

Multiplions la première de ces équations par ∂_β^2, la seconde par ∂_α^2, il vient

$$2\,(\alpha_1 \mid \partial_\alpha)\,\partial_\beta^2 + \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 = 0, \qquad 2\,(\beta_1 \mid \partial_\beta)\,\partial_\alpha^2 + \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 = 0,$$

et en combinant ces relations par addition et soustraction, on obtient les importantes relations

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1 \mid \partial_\alpha)\,\partial_\beta^2 + (\beta_1 \mid \partial_\beta)\,\partial_\alpha^2 + \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 = 0,\\
&(\alpha_1 \mid \partial_\alpha)\,\partial_\beta^2 - (\beta_1 \mid \partial_\beta)\,\partial_\alpha^2 = 0.
\end{aligned}
$$

On voit d'après cela que les déplacements de quatre points quelconques et plus du système Σ dépendent l'un de l'autre.

§ 1'. — Si les déplacements des points A, B, C et U du système Σ sont infiniment petits, il résulte des formules du § 1, si nous négligeons les grandeurs infiniment petites d'ordre supérieur devant celles d'ordre moindre,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \mid d\beta + \beta_1 \mid d\alpha = 0,\\
&\alpha_1 \mid d\rho_3 + \beta_1 d\rho_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \beta_1 \mid \overline{v_2} = (\alpha_1 + \beta_1) \mid \overline{v_1} ;\\
&\xi_1 \mid d\gamma + \gamma_1 \mid \partial\xi = 0,\\
&\xi_1 \mid d\rho_3 + \gamma_1 \mid d\rho = \xi_1 \mid d\rho_2 + \gamma_1 \mid d\rho_1, \qquad \xi_1 \mid \overline{\nu_3} + \gamma_1 \mid \overline{\nu} = \xi_1 \mid \overline{\nu_2} + \gamma_1 \mid \overline{\nu_1} ;\\
&\beta_1 \mid d\rho + \eta_1 \mid d\rho_3 = \beta_1 \mid d\rho_2 + \eta_1 \mid d\rho_1, \qquad \beta_1 \mid \overline{\nu} + \overline{\eta_1} \mid \overline{\nu_3} = \beta_1 \mid \overline{\nu_2} + \eta_1 \mid \overline{\nu_1} ;\\
&\alpha_1 \mid d\rho + \theta_1 \mid d\rho_2 = \alpha_1 \mid d\rho_3 + \theta_1 \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{\nu} + \theta_1 \mid \overline{\nu_2} = \alpha_1 \mid \overline{\nu_3} + \theta_1 \mid \overline{\nu_1} .
\end{aligned}
$$

Les relations ainsi développées, qui peuvent facilement se traduire en langage ordinaire, sont évidemment encore valables, si les quatre points sont situés dans un plan.

II. — *Le plan ou champ des points.*

§ 2. — Soient $A_1 = O + \rho_1$, $B_1 = O + \rho_2$, $C_1 = O + \rho_3$, trois points situés non en ligne droite dans le même plan et soit $U_1 = O + \rho$ un point arbitraire du même plan. Avec le point O comme pôle de coordonnées, l'équation du radius vector de ce plan est

$$\rho = m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3, \qquad m + n + p = 1,$$

ou aussi

$$\rho = \rho_1 + n(\rho_2 - \rho_1) + p(\rho_3 - \rho_1),$$

et si nous posons

$$(\rho_2 - \rho_1) = \alpha_1, \qquad (\rho_3 - \rho_1) = \beta_1,$$

cette équation devient

$$\rho = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1.$$

Soit maintenant d'une manière quelconque le plan Σ transporté de la position Σ_1, pour laquelle nous avons écrit l'équation, à la position Σ_2.

Si le plan Σ est transporté de la position Σ_1 à la position Σ_2 ses points A, B, C et U subissent les déplacements $\overline{A_1A_2} = \delta_1$, $\overline{B_1B_2} = \delta_2$, $\overline{C_1C_2} = \delta_3$ et $\overline{U_1U_2} = \delta$, de sorte que avec $U_2 = O + \psi$ pour le plan Σ_2 il vient la relation

$$\begin{aligned} \psi = \rho + \delta &= m(\rho_1 + \delta_1) + n(\rho_2 + \delta_2) + p(\rho_3 + \delta_3) \\ &= m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3 + m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3, \end{aligned}$$

ou, avec $m + n + p = 1$,

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n\{(\rho_2 - \rho_1) + (\delta_2 - \delta_1)\} + p\{(\rho_3 - \rho_1) + (\delta_3 - \delta_1)\},$$

ou

$$\psi = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1 + \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1),$$

ou

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n(\alpha_1 + \delta_\alpha) + p(\beta_1 + \delta_\beta),$$

et enfin

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n\alpha_2 + p\beta_2,$$

avec $(\alpha_1 + \delta_\alpha) = \alpha_2$, $(\beta_1 + \delta_\beta) = \beta_2$, où les vecteurs $\alpha_2 = \overline{A_2B_2}$ et $\beta_2 = \overline{A_2C_2}$ sont situés dans le plan Σ_2 et où l'équation en ψ est l'équation du plan Σ_2 en plus simple forme.

Le déplacement $\delta = (\psi - \rho) = (U_2 - U_1)$ du point arbitraire U du plan Σ est alors

$$\begin{aligned}
\delta &= m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3, \qquad m + n + p = 1, \\
\delta &= \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1), \\
\delta &= \delta_1 + n(\alpha_2 - \alpha_1) + p(\beta_2 - \beta_1), \\
\delta &= \delta_1 + n\delta_\alpha + p\delta_\beta.
\end{aligned}$$

Prenons m, n et p comme variables, δ comme radius vector, ces équations donnent alors les déplacements totaux les points du plan Σ, quand celui-ci passe d'une manière quelconque de la position Σ_1 à la position Σ_2 et ces équations sont celles d'un plan dont les radii vectores, sont égaux aux déplacements des points du plan Σ.

« Le système des déplacements des points d'un plan, qui change sa position, a la propriété d'être déterminé pour tous les points de ce plan si les déplacements de trois points quelconques du même plan, mais non en ligne droite sont connus. » — « L'hodographe des déplacements des points d'un plan est un autre plan qui en général ne passe pas par le pôle de l'hodographe. Des figures correspondantes en Σ, Σ_1, Σ_2 et dans le plan de l'hodographe sont des figures semblables. »

Il suit de la dernière équation

$$[(\delta - \delta_1)(\delta_\alpha \delta_\beta)] = 0.$$

Si l'on désigne par ε le vecteur de position du plan donné, on a

$$\varepsilon = [\,|\,(\delta_\alpha \delta_\beta)] : \sqrt{(\delta_\alpha \delta_\beta)^2},$$

et on a aussi

$$(\delta - \delta_1) \mid \varepsilon = 0, \qquad (\delta \mid \varepsilon) = (\delta_1 \mid \varepsilon).$$

« Le plan de l'hodographe est parallèle à la différence des déplacements des extrémités de deux vecteurs hétérogènes quelconques du plan Σ. »

« Les projections des déplacements des points du plan Σ sur la direction du vecteur de position du plan de l'hodographe sont égaux entre eux; tous les points du plan Σ subissent, dans la direction du vecteur de position de ce plan, le même déplacement. »

§ 2'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, les équations des plans Σ_1 et Σ_2, si nous posons $\alpha_1 \equiv \alpha$, $\beta_1 \equiv \beta$, $\alpha_2 = \alpha_1 + d\alpha$, $\beta_2 = \beta_1 + d\beta$, deviennent

$$\rho = \rho_1 + n\alpha + p\beta,$$
$$\psi = \rho_1 + d\rho_1 + n(\alpha + d\alpha) + p(\beta + d\beta),$$

l'équation de l'hodographe du système des déplacements des éléments du plan Σ est donc

$$d\rho = (\psi - \rho) = d\rho_1 + nd\alpha + pd\beta,$$

laquelle, comme nous voyons, s'obtient aussi immédiatement par différenciation de l'équation du plan $\Sigma \equiv \Sigma_1$.

D'après cela, il vient pour les vitesses des points du plan

$$\bar{v} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_1}{dt} + n\frac{d\alpha}{dt} + p\frac{d\beta}{dt}$$

ou

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + n(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + p(\bar{v}_3 - \bar{v}_1),$$
$$\bar{v} = (1 - n - p)\,\bar{v}_1 + n\bar{v}_2 + p\,\bar{v}_3.$$

Avec l'équation relative à $d\rho$ nous obtenons

$$[(d\rho - d\rho_1)\ (d\alpha d\beta)] = 0,$$

ce qui entraîne

$$(\bar{v} - \bar{v}_1)\,[(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)\ (\bar{v}_3 - \bar{v}_1)] = 0,$$

et si nous posons

$$(d\alpha d\beta) : \sqrt{\overline{(d\alpha d\beta)^2}} = (\alpha'\beta') : \sqrt{\overline{(\alpha'\beta')^2}} = |\,\varepsilon,$$

il s'ensuit

$$(d\rho - d\rho_1)\,|\,\varepsilon = 0, \qquad (d\rho\,|\,\varepsilon) = (d\rho_1\,|\,\varepsilon),$$
$$(\bar{v} - \bar{v}_1)\,\varepsilon\,| = 0, \qquad (\bar{v}\,|\,\varepsilon) = (\bar{v}_1\,|\,\varepsilon).$$

« L'hodographe des déplacements infiniment petits et l'hodographe des vitesses des points d'un plan Σ sont des plans parallèles qui en général ne passent pas par les pôles de ces hodographes. Les projections des déplacements, ainsi que les projections des vitesses des points du plan Σ sur la direction du vecteur de position des plans des hodographes sont égaux entre eux ».

§ 3. — Les déplacements des points du plan Σ forment, avec le plan Σ en ses positions Σ_1 et Σ_2, en général des angles différents, ce que l'hodographe montre immédiatement. Parmi les points du plan Σ il peut y en avoir de tels que leurs déplacements soient perpendiculaires au plan $\Sigma = \Sigma_1$ et de tels que leurs déplacements soient en ce plan.

Pour des déplacements δ_n perperdiculaires à Σ_1, nous avons la relation

$$\delta_n = \delta_1 + n\delta_\alpha + p\delta_\beta = x \,|\, (\alpha_1\beta_1) = y\varepsilon_n,$$
$$\varepsilon_n = [\,|\,(\alpha_1\beta_1)] : \sqrt{(\alpha_1\beta_1)^2}.$$

Avec cela on obtient

$$(\delta_1\delta_\alpha\delta_\beta) = x\,(\delta_\alpha\delta_\beta)\,|\,(\alpha_1\beta_1),$$

de sorte que

$$\delta_n = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{(\delta_\alpha\delta_\beta)\,|\,(\alpha_1\beta_1)}\,|\,(\alpha_1\beta_1).$$

De plus nous obtenons

$$(\varepsilon_n\delta_\beta\delta_1) + n\,(\varepsilon_n\delta_\beta\delta_\alpha) = 0, \qquad (\varepsilon_n\delta_\alpha\delta_1) + p\,(\varepsilon_n\delta_\alpha\delta_\beta) = 0,$$

ce qui donne

$$n = \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}, \qquad p = \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n},$$

et, par suite,

$$\delta_n = \delta_1 + \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\delta_\alpha + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\delta_\beta,$$

de sorte qu'en général il n'y a qu'un seul déplacement de cette espèce, et pour le radius vector du point qui est déplacé par le vecteur δ_n nous obtenons

$$\rho_n = \rho_1 + \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\alpha_1 + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\beta_1.$$

Si nous observons que $\delta_\alpha = (\delta_2 - \delta_1)$, $\delta_\beta = (\delta_3 - \delta_1)$, $\alpha_1 = (\rho_2 - \rho_1)$, $\beta_1 = (\rho_3 - \rho_1)$ nous trouvons facilement

$$\delta_n = \frac{1}{\delta_\alpha \delta_\beta \varepsilon_n} \left\{ (\delta_2 \delta_3 \varepsilon_n) \delta_1 + (\delta_3 \delta_1 \varepsilon_n) \delta_2 + (\delta_1 \delta_2 \varepsilon_n) \delta_3 \right\},$$

$$\rho_n = \frac{1}{\delta_\alpha \delta_\beta \varepsilon_n} \left\{ (\delta_2 \delta_3 \varepsilon_n) \rho_1 + (\delta_3 \delta_1 \varepsilon_n) \rho_2 + (\delta_1 \delta_2 \varepsilon_n) \rho_3 \right\}.$$

Le point du plan $\Sigma = \Sigma_1$ qui est déplacé, autour du vecteur δ_n, est son pôle.

§ 3'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits il existe en général un point dont le déplacement $d\rho_n$ lui est perpendiculaire. D'après le paragraphe précédent, nous obtenons successivement pour ce déplacement, pour le radius vector du point du plan correspondant et pour la vitesse de ce point

$$d\rho_n = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{(d\alpha d\beta) \mid (\alpha\beta)} \mid (\alpha\beta),$$

$$d\rho_n = \frac{1}{d\alpha d\beta \varepsilon_n} \left\{ (d\rho_2 d\rho_3 \varepsilon_n)\, d\rho_1 + (d\rho_3 d\rho_1 \varepsilon_n)\, d\rho_2 + (d\rho_1 d\rho_2 \varepsilon_n)\, d\rho_3 \right\},$$

$$\varepsilon_n = \mid (\alpha\beta) : \sqrt{(\alpha\beta)^2},$$

$$\rho_n = \frac{1}{d\alpha d\beta \varepsilon^n} \left\{ (d\rho_2 d\rho_3 \varepsilon_n)\, \rho_1 + (d\rho_3 d\rho_1 \varepsilon_n)\, \rho_2 + (d\rho_1 d\rho_2 \varepsilon_n)\, \rho_3 \right\};$$

et en outre

$$\bar{v}_n = \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}{(\alpha'\beta') \mid (\alpha\beta)} \mid (\alpha\beta).$$

$$\bar{v}_n = \frac{1}{\alpha'\beta'\varepsilon_n} \left\{ (\overline{v_2 v_3 \varepsilon_n})\, \bar{v}_1 + (\overline{v_3 v_1 \varepsilon_n})\, \bar{v}_2 + (\overline{v_1 v_2 \varepsilon_n})\, v_3 \right\},$$

$$\rho_n = \frac{1}{\alpha'\beta'\varepsilon_n} \left\{ (\overline{v_2 v_3 \varepsilon_n})\, \rho_1 + (\overline{v_3 v_1 \varepsilon_n})\, \rho_2 + (\overline{v_1 v_2 \varepsilon_n})\, \rho_3 \right\}.$$

§ 4. — Examinons maintenant si le plan Σ possède des points dont les déplacements sont dans le plan $\Sigma = \Sigma_1$.

Si nous désignons ces déplacements par δ_c, nous avons pour ceux-ci la relation

$$\delta_c = \delta_1 + n\delta_\alpha + p\delta_\beta = u_1 \alpha_1 + u_2 \beta_1.$$

Les coefficients doivent satisfaire aux conditions

$$\delta_1\delta_\alpha\delta_\beta = u_1 (\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta) + u_2 (\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta),$$

$$u_2 = \frac{1}{\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta} \left\{ (\delta_1\delta_2\delta_3) - u_1 (\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta) \right\} = b + cu_1 ;$$

et de plus

$$\delta_1\delta_\beta\beta_1 + n (\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1) = u_1 (\alpha_1\delta_\beta\beta_1),$$

$$\delta_1\delta_\alpha\beta_1 + p (\delta_\beta\delta_\alpha\beta_1) = u_1 (\alpha_1\delta_\beta\beta_1),$$

$$n = \frac{1}{\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1} \left\{ (\delta_3\delta_2\beta_1) + u_1 (\alpha_1\delta_\beta\beta_1) \right\} = b_1 + c_1u_1,$$

$$p = \frac{1}{\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1} \left\{ (\delta_2\delta_1\beta_1) + u_1 (\alpha_1\delta_\alpha\beta_1) \right\} = b_2 + c_2u_1.$$

Avec ces valeurs des coefficients, où un coefficient reste indéterminé, nous obtenons

$$\delta_e = b\beta_1 + u_1 (\alpha_1 + c\beta_1).$$

L'hodographe pour les déplacement δ_e est une ligne droite ; il y a donc un ensemble de points du plan Σ dont les déplacements sont dans le plan Σ_1. Cette ligne hodographe est, dans l'hodographe du système des déplacements de Σ_1 la section de son plan par le plan parallèle à Σ_1 qui passe par son pôle. Les équations de ces deux plans sont

$$(\delta - \delta_1) (\delta_\alpha\delta_\beta) = 0, \qquad (\tau\alpha_1\beta_1) = 0.$$

Par conséquent la section de ces plans est parallèle au vecteur

$$\begin{aligned} [(\delta_\alpha\delta_\beta) (\alpha_1\beta_1)] &= (\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta)\, \alpha_1 - (\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta)\, \beta_1 \\ &= (\delta_\alpha\alpha_1\beta_1)\, \delta_\beta - (\delta_\beta\alpha_1\beta_1)\, \delta_\alpha . \end{aligned}$$

De $u_1 = 0$, il suit $\delta_e = b\beta_1$, et c'est pourquoi les équations de l'hodographe pour les déplacements δ_e sont

$$\delta_e = b\beta_1 + u \left\{ (\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta)\, \alpha_1 - (\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta)\, \beta_1 \right\},$$

$$\delta_e = b\beta_1 + u \left\{ (\delta_\alpha\alpha_1\beta_1)\, \delta_\beta - (\delta_\beta\alpha_1\beta_1)\, \delta_\alpha \right\}.$$

Avec les valeurs des coefficients n et p, on obtient de plus

$$\delta_e = \delta_1 + b_1\delta_\alpha + b_2\delta_\beta + u_1 (c_1\delta_\alpha + c_2\delta_\beta),$$

et si nous posons $b_1 + b_2 + b_3 = 1$, $c_1 + c_2 = -c_3$, il vient

$$\delta_e = (b_1\delta_2 + b_2\delta_3 + b_3\delta_1) + u_1(c_1\delta_2 + c_2\delta_3 + c_3\delta_1).$$

Enfin nous obtenons pour l'équation du lieu des points dont le déplacement est δ_e

$$\chi = (b_1\rho_2 + b_2\rho_3 + b_3\rho_1) + u_1(c_1\rho_2 + c_2\rho_3 + c_3\rho_1),$$

il est parallèle au vecteur

$$\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 = \frac{1}{\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1}\left\{(\alpha_1\delta_\alpha\beta_1)\beta_1 - (\alpha_1\delta_\beta\beta_1)\alpha_1\right\},$$

c'est une ligne droite, comme nous l'avons déjà conclu de l'équation de l'hodographe de δ_e. Cette droite s'appelle la *caractéristique* du plan $\Sigma = \Sigma_1$.

Les équations des plans Σ_1 et Σ_2 sont

$$(\rho - \rho_1)(\alpha_1\beta_1) = 0, \qquad (\psi - \rho_1 - \delta_1)(\alpha_2\beta_2) = 0.$$

Les extrémités des déplacements δ_e sont situés sur l'intersection de ces plans, celle-ci est parallèle au vecteur

$$\eta = [(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)] = (\alpha_1\alpha_2\beta_2)\beta_1 - (\beta_1\alpha_2\beta_2)\alpha_1.$$

Pour cette ligne on a $\psi = \rho$, c'est pourquoi

$$n\alpha_1 + p\beta_1 = \delta_1 + n_1\alpha_2 + n_2\beta_2,$$

de sorte que

$$(n\alpha_1 + p\beta_1)(\alpha_2\beta_2) = \delta_1(\alpha_2\beta_2),$$

c'est-à-dire

$$p = \frac{1}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\left\{(\delta_1\alpha_2\beta_2) - n(\alpha_1\alpha_2\beta_2)\right\}$$

si $n = 0$,

$$p = \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}$$

et, par ces valeurs, la ligne en question passe par le point

$$o + \rho_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\beta_1,$$

et avec cela nous avons pour l'équation de l'intersection, ou pour le lieu des extrémités des déplacements δ_e, puisqu'elle est parallèle au vecteur γ_1,

$$\psi = \rho_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\beta_1 + u\left\{(\beta_1\alpha_2\beta_2)\,\alpha_1 - (\alpha_1\alpha_2\beta_1)\,\beta_1\right\}.$$

Avec les valeurs précédentes de n et p on a

$$\delta_e = \delta_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\delta_3,$$

la caractéristique passe donc par le point

$$o + \rho_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\beta_1 - \left(\delta_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\delta_3\right),$$

et puisqu'elle est parallèle au vecteur γ, nous avons aussi pour équation de la même

$$\chi = \rho_1 - \delta_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,(\beta_1 - \delta_3) + n\left\{(\alpha_1\delta_3\beta_1)\,\alpha_1 - (\alpha_1\delta_2\beta_1)\,\beta_1\right\}.$$

Si l'on a en particulier $\delta_1 = o$, le point A du plan Σ ne subit aucun déplacement et alors les équations de la caractéristique et du lieu des extrémités des déplacements δ_e de ses points sont

$$\chi = \rho_1 + u\left\{(\alpha_1\delta_3\beta_1)\,\alpha_1 - (\alpha_1\delta_2\beta_1)\,\beta_1\right\},$$
$$\psi = \rho_1 + x\left\{(\beta_1\alpha_2\beta_2)\,\alpha_1 - (\alpha_1\alpha_2\beta_2)\,\beta_1\right\}.$$

Si les déplacements des points A et B sont nuls, on a $\delta_1 = o$, $\delta_2 = o$, d'où alors

$$\chi = \rho_1 + n\alpha_1 = \psi, \qquad \delta_e = o.$$

Si l'on a $\delta_1 = o$, $\delta_2 = \delta_3$, nous obtenons

$$\chi = \rho_1 + u\,(\alpha_1 - \beta_1) = \psi, \qquad \delta_e = o.$$

Dans les deux derniers cas le plan Σ possède une droite qui ne change pas de lieu quand il passe de la position Σ_1 à la position Σ_2.

§ 4'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, on procédera comme au § 4 en désignant par δ_k les grandeurs correspondant aux grandeurs d_k devenues infiniment petites; on aura pour l'équation de l'hodographe des déplacements situés dans le plan Σ_1

$$d\rho = (b_1 d\rho_2 + b_2 d\rho_3 + b_3 d\rho_1) + u_1 (c_1 d\rho_2 + c_2 d\rho_3 + c_3 d\rho_1).$$

La vitesse qui correspond à ce déplacement est

$$\overline{v}_e = (b_1\overline{v}_2 + b_2\overline{v}_3 + b_3\overline{v}_1 + u_1 (c_1\overline{v}_2 + c_2\overline{v}_3 + c_3\overline{v}_1).$$

L'équation de la caractéristique du plan $\Sigma = \Sigma_1$ est maintenant

$$\chi = \rho_1 - d\rho_1 + \frac{d\rho_1 (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)}{\beta(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)} (\beta - d\beta) + u \left\{ (\beta\, d\alpha\, d\beta)\alpha - (\alpha d\alpha d\beta)\beta \right\}$$

et l'équation du lieu des extrémités des déplacements δ_e est

$$\psi = \rho_1 + \frac{d\rho_1 (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)}{\beta(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)} \beta$$
$$+ u \left\{ [\beta(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)]\alpha - [\alpha(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)]\beta \right\},$$

toutes ces équations, comme on le voit immédiatement, peuvent facilement être simplifiées, mais nous en laisserons le soin au lecteur, afin de ne pas abuser de la place qui nous a été accordée dans cette revue.

§ 5. — Parmi tous les déplacements qui donnent l'hodographe du système des déplacements du plan Σ, l'un est moindre que tous les autres; il est égal à la perpendiculaire abaissée du pôle sur le plan de l'hodographe. Désignons ce déplacement par δ_0; il est donné par la condition

$$\delta_0 = \delta_1 + n\delta_\alpha + p\delta_\beta = x \mid (\delta_\alpha \delta_\beta) = y\varepsilon.$$

De celle-ci suit immédiatement

$$(\delta_1 \delta_\alpha \delta_\beta) = x(\delta_\alpha \delta_\beta)^2, \qquad x = (\delta_1 \delta_2 \delta_3) : (\delta_\alpha \delta_\beta)^2,$$

de sorte que

$$\delta_0 = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{(\delta_\alpha \delta_\beta)^2} \mid (\delta_\alpha \delta_\beta) = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{\sqrt{(\delta_\alpha \delta_\beta)^2}} \varepsilon.$$

De plus, nous obtenons

$$(\delta_1\delta_\beta) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) + n(\delta_\alpha\delta_\beta)^2_- = 0, \qquad (\delta_\alpha\delta_1) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) + p\,(\delta_\alpha\delta_\beta)^2_- = 0,$$

$$n = \frac{(\delta_3\delta_1) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2_-} = b', \qquad p = \frac{(\delta_1\delta_2) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2_-} = c',$$

et aussi avec cela

$$\delta_0 = \delta_1 + \frac{(\delta_3\delta_1) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2_-}\,\delta_\alpha + \frac{(\delta_1\delta_2) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2_-}\,\delta\beta,$$

ou, en abrégeant

$$\delta_0 = \delta_1 + b'\delta_\alpha + c'\delta_\beta,$$

d'où il suit

$$\delta_0 = a'\delta_1 + b'\delta_2 + c'\delta_3, \qquad a' + b' + c' = 1.$$

Comme les coefficients de cette équation sont bien déterminés il n'y a en général qu'un point dont le déplacement est δ_0; son radius vector est

$$\rho_0 = \rho_1 + b'\alpha_1 + c\beta_1.$$

On a

$$\delta \mid \varepsilon = \delta_1 \mid \varepsilon = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2_-}}\,.$$

« Les projections des déplacements δ sur la direction de ε sont égales au déplacement minimum δ_0 ».

Si l'on a $\delta_1 = 0$, le plan de l'hodographe du système des déplacements passe par le pôle de cet hodographe, on a alors $\delta_0 = \delta_1 = 0$, $\rho_0 = \rho_1$ et A est le point dont le déplacement est le moindre. Si l'on a $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, on a aussi $\delta_0 = 0$ et $\rho_0 = \rho_1$, et tous les points de la droite AB sont sans déplacement parce qu'il en est ainsi des points A et B.

§ 5'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, nous obtenons comme déplacement minimum

$$d\rho_0 = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{\sqrt{(d\alpha d\beta)^2_-}}\,\varepsilon,$$

et aussi

$$d\rho_0 = d\rho_1 + \frac{(d\rho_3 d\rho_1) \mid (d\alpha d\beta)}{(d\alpha d\beta)^2_-}\,d\alpha + \frac{(d\rho_1 d\rho_2) \mid (d\alpha d\beta)}{(d\alpha d\beta)_2}\,d\beta,$$

la vitesse avec laquelle il s'exécute est

$$\overline{v}_0 = \frac{\overline{v}_1\, \overline{v}_2\, \overline{v}_3}{\sqrt{[(\overline{v}_2-\overline{v}_1)(\overline{v}_3-\overline{v}_1)]^2}}\, \varepsilon,$$

et la forme des autres résultats se voit immédiatement d'après le paragraphe 5.

§ 6. — Les déplacements des points du plan Σ sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_1 + (n\delta_\alpha + p\delta_\beta)\\ &= (n\delta_\alpha + p\delta_\beta) + \delta_1.\end{aligned}$$

D'après cela le déplacement de chaque point du plan se compose de deux composantes, c'est-à-dire d'un déplacement δ_1 commun à tous les points du système et d'une composante

$$\delta_r = (n\delta_\alpha + p\delta_\beta),$$

qui est parallèle au plan de l'hodographe du système des déplacements et perpendiculaire au vecteur de position de ce plan.

Nous allons maintenant examiner par quelles sortes de mouvements simples le plan Σ peut passer de la position Σ_1 à la position Σ_2 en passant des cas spéciaux au cas général ; dans ce paragraphe nous admettrons que $\delta_1 = 0$.

Si le point A est sans déplacement, $\delta_1 = 0$, le point $A_1 = A_2$ est un point double des plans Σ_1 et Σ_2.

L'équation de l'hodographe du système des déplacements des points du plan Σ est à présent

$$\delta = n\delta_2 + p\delta_3.$$

Les déplacements totaux des points du plan Σ sont tous parallèles au plan de l'hodographe qui passe par son pôle perpendiculairement au vecteur de position ε de ce plan, lequel vecteur est donné par

$$\varepsilon = [\,|\,(\delta_2\delta_3)] : \sqrt{(\delta_2\delta_3)^2}.$$

Comme n et p (indépendants l'un de l'autre) sont des nombres variables, il pourrait exister plusieurs points sans déplacement, on aurait la condition $\delta = 0$, ou

$$n\delta_2 + p\delta_3 = 0$$

et si cette équation doit être satisfaite, δ_2 et δ_3 doivent être des vecteurs parallèles, ce que nous excluons ici, de sorte qu'il n'y a qu'un seul point sans déplacement.

Soient Σ', Σ'_1, Σ'_2 les projections de Σ, Σ_1, Σ_2, dans la direction de ε, sur un plan Σ_h parallèle au plan de l'hodographe du système

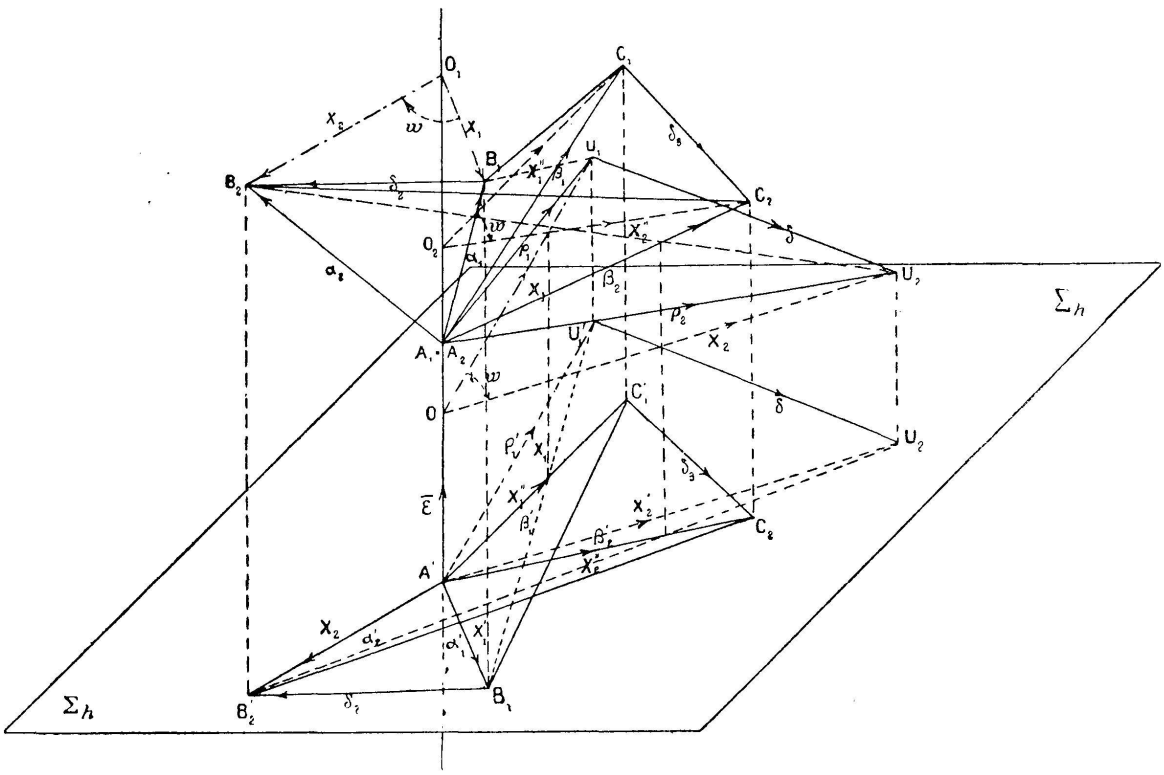

Fig. 2.

des déplacements; Σ', Σ'_1, Σ'_2 sont des systèmes congruents en ce plan Σ_h car les projections de tous les vecteurs qui lient des points homologues de Σ_1 et de Σ_2 sont égales à ces vecteurs. Avec la projection A' du point $A = A_1 = A_2$ dont le déplacement est nul, coïncide le point double de Σ'_1 et Σ'_2 (fig. 2). Si Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, Σ' passe aussi de la position Σ'_1 à la position Σ'_2 et si Σ' coïncide avec Σ'_2 de sorte que des points correspondants de Σ' et Σ'_2 se couvrent, Σ est encore passé de la position Σ_1 à la position Σ_2. Le plus simple mouvement de Σ' dans le plan Σ_h, pour parvenir d'une position Σ'_1 à la position Σ'_2, est la rotation de Σ', autour du point double A' des systèmes plans Σ'_1

et Σ'_2, d'un angle w égal à l'angle des droites homologues de Σ'_1 et Σ'_2. Les déplacements des points de Σ' sont égaux aux déplacements des points correspondants de Σ car ces derniers sont parallèles au plan Σ_h.

En se reportant pour les notations à la figure (2), on a, si le système Σ' passe de la position Σ'_1 à la position Σ'_2, en posant

$$\widehat{(\alpha'_1\alpha'_2)} = \widehat{(\beta'_1\beta'_2)} = w,$$

$$\alpha'_2 = \cos w\alpha'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\alpha'_1), \qquad \beta'_2 = \cos w\beta'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\beta'_1).$$

De plus nous avons par rapport au système plan Σ les équations

$$\alpha_2 = (1 - \cos w_1)(\varepsilon \mid \alpha_1)\varepsilon + \cos w_1\alpha_1 + \sin w_1 \mid (\varepsilon\alpha_1),$$
$$\beta_2 = (1 - \cos w_2)(\varepsilon \mid \beta_1)\varepsilon + \cos w_2\beta_1 + \sin w_2 \mid (\varepsilon\beta_1).$$

Le plan qui passe par $\overline{B_1B_2} = \delta_2$ perpendiculairement à la droite A_1A' coupe cette ligne, qui est parallèle ε, en un point O_1 et on a $\Delta O_1B_1B_2 \equiv \Delta A'B_1'B_2'$; de $\overline{O_1B_1} = \chi'_1$, $\overline{O_1B_2} = \chi'_2$ on a par suite $\chi'_1 = \alpha_1'$, $\chi'_2 = \alpha_2'$, donc

$$\chi'_2 = \cos w_1\chi'_1 + \sin w_1 \mid (\varepsilon\chi'_1) = \cos w\alpha'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\alpha'_1),$$

de sorte que

$$w_1 = w.$$

Le plan qui passe par $\overline{C_1C_2} = \delta_3$ et est perpendiculaire à la droite A_1A' coupe cet axe $A_1A' = \varepsilon$ en un point O_2 et on a $\Delta O_2C_1C_2 \equiv \Delta A'C_1'C_2'$; de $\overline{O_2C_1} = \chi''_1$, $\overline{O_2C_2} = \chi''_2$ on a par suite $\chi''_1 = \beta'_1$, $\chi''_2 = \beta'_2$, donc

$$\chi''_2 = \cos w_2\chi''_1 + \sin w_2 \mid (\varepsilon\chi_1'') = \cos w\beta'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\beta'_1),$$

de sorte que

$$w_2 = w.$$

Si le point B du plan Σ, par sa rotation autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ qui passe par le point $A_1 = A_2$, passe de la position B_1 à la position B_2, le point C passe aussi du lieu C_1 au lieu C_2 et de même tous les points homologues de Σ et Σ_2 se couvrent puisque trois paires de points homologues de Σ et Σ_2 coïncident.

L'amplitude de la rotation s'obtient moyennant le déplacement connu d'un des points B ou C; on a

$$\delta_2 = (\cos w - 1)\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_2),$$

d'où, par quadrature intérieure et extraction de racine, il vient

$$2 \sin \frac{1}{2} w = (\sqrt{\delta_2^2} : h'_1), \qquad h'_1 = \sqrt{\chi'^2_1}.$$

Pour un point arbitraire U du plan Σ nous obtenons maintenant, si nous posons $U_1 = A_1 + \rho_1$, $U_2 + A_1 = \rho_2$,

$$\rho_2 = (1 - \cos w)(\varepsilon \mid \rho_1)\varepsilon + \cos w \rho_1 + \sin w \mid (\varepsilon\rho_1),$$

ou, avec

$$\rho_1 = u\varepsilon + \chi_1, \qquad \rho_2 = u\varepsilon + \chi_2, \qquad (\varepsilon \mid \chi_1) = (\varepsilon \mid \chi_2) = 0, \qquad \chi_1^2 = \chi_2^2$$
$$\chi_2 = \cos w \chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1),$$

de sorte que le déplacement de ce point est

$$\delta = \chi_2 - \chi_1 = (\cos w - 1)\chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1).$$

« Etant donné un point du plan Σ sans déplacement, ce plan passe de la manière la plus simple d'une position Σ_1 à une position Σ_2 en tournant autour de l'axe passant par le point fixe du plan qui est point double de Σ_1 et Σ_2 et qui est perpendiculaire aux déplacements de deux autres points quelconques du plan Σ assujettis toutefois à ne pas être en ligne droite avec le point fixe. L'angle de rotation est égal à l'angle qu'enferment les perpendiculaires abaissées des éléments original et final d'un déplacement donné sur l'axe de rotation. Les déplacements des points du plan Σ sont perpendiculaires à cet axe et de grandeur directement proportionnelle à leurs distances à cet axe. Le mouvement correspondant de la projection du système plan Σ sur un plan perpendiculaire audit axe est la rotation de la projection autour du point d'intersection de l'axe de ce plan, du même angle que précédemment ».

Dans ce mouvement les trajectoires des points du plan Σ sont des arcs de cercle dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de rotation et dont les centres sont situés sur l'axe.

Le système des déplacements

$$\delta = n\delta_\alpha + p\delta_\beta$$

s'appelle un *système rotatif*, puisqu'il est engendré par rotation.

§ 6'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, on a $d\rho_1 = o$, et son mouvement est équivalent à une rotation infiniment petite d'amplitude $d\varpi$ autour de l'axe passant par le point double de Σ_1 et Σ_2 et perpendiculaire au plan de l'hodographe des déplacements. L'angle de rotation est donné par

$$d\varpi = (\sqrt{d\rho_2^2} : h'_1) = (\sqrt{d\rho_3^2} : h''_1),$$

et la vitesse angulaire du plan est

$$w = (v_2 : h'_1) = (v_3 : h''_1), \qquad v_2 : v_3 = h'_1 : h''_1.$$

Pour un point arbitraire du plan Σ nous obtenons

$$\begin{aligned} &\rho_2 = \rho_1 + d\varpi \mid (\varepsilon\rho_1), \qquad \chi_2 = \chi_1 + d\varpi \mid (\varepsilon\chi_1), \\ &d\rho = d\varpi \mid (\varepsilon\rho_1) = d\varpi \mid (\varepsilon\chi_1), \\ &\bar{v} = w \mid (\varepsilon\rho_1) = w \mid (\varepsilon\chi_1). \end{aligned}$$

§ 7. — Un cas plus spécial est celui où les points A et B du plan Σ sont sans déplacements ; alors $\delta_1 = o$, $\delta_2 = o$, de sorte que $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$ sont des points doubles de Σ_1 et Σ_2.

Alors la droite $A_1 B_1 = A_2 B_2$ est évidemment une ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Dans ce cas, nous avons

$$\delta = p\delta_3$$

et les déplacements des points du plan Σ sont parallèles entre eux.

Avec $p = o$, il vient

$$\delta = o, \qquad \rho = \rho_1 + n\alpha_1,$$

de sorte que les points de la droite $AB = A_1 B_1$ ne changent pas de lieu ; cette droite est la caractéristique du plan $\Sigma = \Sigma_1$.

Comme on a généralement

$$\alpha_1 \mid \delta_\beta + \beta_2 \mid \delta_\alpha = 0,$$

on a à présent

$$\alpha_1 \mid \delta_3 = 0, \qquad \alpha_1 \mid \delta = 0,$$

les déplacements de tous les points du plan Σ sont perpendiculaires à la ligne double de Σ_1 et Σ_2. Les points homologues de Σ_1 et Σ_2 sont également éloignés de chaque point de cette ligne, cette distance variant naturellement pour chaque couple de points.

L'équation d'une droite du plan $\Sigma = \Sigma_1$ qui est parallèle à α_1 est

$$\rho = \rho_1 + c\beta_1 + u\alpha_1,$$

et comme $\delta_1 = 0$, $\delta_\alpha = 0$, les déplacements des points de cette droite sont

$$\delta = c\delta_3,$$

ils sont égaux entre eux. En prenant c comme paramètre variable, il suit de là que les points de chaque rayon du plan Σ qui est parallèle α_1 subissent un déplacement égal, de sorte que les déplacements des points du plan Σ sont directement proportionnels à leurs distances à la droite $A_1 B_1 = A_2 B_2$; en outre les déplacements δ sont perpendiculaires à α_1, et la droite $A_1 B_1$ est un axe pour le transport par rotation du plan Σ de la position Σ_1 en la position Σ_2.

Nous avons après cela, si $\varepsilon = (\alpha_1 : \sqrt{\alpha_1^2})$,

$$\beta_2 = (\varepsilon \mid \beta_1)\,\varepsilon + \cos w\,(\varepsilon\beta_1) \mid \varepsilon + \sin w \mid (\varepsilon\beta_1),$$

avec $\beta_1 = u\,\varepsilon + \chi'_1$, $\beta_2 = u\,\varepsilon + \chi'_2$, $(\varepsilon \mid \chi'_1) = (\varepsilon \mid \chi'_2) = 0$ est

$$\chi'_2 = \cos w\,\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1),$$
$$\delta_3 = (\cos w - 1)\,\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1),$$

d'où il suit

$$2 \sin \frac{1}{2} w = (\sqrt{\delta_3^2} : h'_1), \quad h'_1 = \sqrt{\chi'^2_1},$$

équation qui détermine l'angle de rotation.

Soit χ_1 la distance vectorielle d'un point arbitraire du plan $\Sigma = \Sigma_1$ à l'axe α_1, cette distance vectorielle devient après la rotation

$$\chi_2 = \cos w \chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon \chi_1),$$

et le déplacement de ce point est

$$\delta = \chi_2 - \chi_1 = (\cos w - 1) \chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon \chi_1).$$

§ 7'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits on a $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = 0$ et le mouvement de ce plan est équivalent à une rotation infiniment petite autour de la ligne double $A_1 B_1 = A_2 B_2$ de Σ_1 et Σ_2; l'amplitude et la vitesse angulaire de cette rotation sont

$$dw = (\sqrt{d\rho_3^2} : h'_1) = (ds_3 : h'_1)\,,$$
$$w = (v_3 : h'_1).$$

§ 8. — Enfin nous voulons examiner le cas spécial dans lequel $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = \delta_3$ est. Le point A du plan Σ est sans déplacement, les déplacements de ces points B et C sont égaux.

Dans ces conditions nous avons

$$\delta = (n + p)\, \delta_3,$$

et les déplacements des points du plan Σ sont parallèles entre eux.

Avec $(n + p) = 0$, c'est-à-dire avec $p = -n$, il vient

$$\delta = 0, \qquad \rho = \rho_1 + n\,(\alpha_1 - \beta_1).$$

Le plan Σ possède donc une droite passant par le point $A = A_1$ dont le lieu ne change pas; elle est parallèle à la différence des vecteurs α_1 et β_1 ainsi qu'à $\overline{B_1 A_1}$ et forme une ligne double de Σ_1 et Σ_2,

On a alors en général

$$(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\, \delta\beta^2 - (\beta_1 \mid \delta_\beta)\, \delta_\alpha^2 = 0,$$

et ici, dans notre cas particulier

$$(\alpha_1 \mid \delta_3)\, \delta_3^2 - (\beta_1 \mid \delta_3)\, \delta_3^2 = 0,$$
$$(\alpha_1 - \beta_1) \mid \delta_3 = 0,$$

de sorte que les déplacements des points du plan Σ sont perpendiculaires à la direction du vecteur $(\alpha_1 - \beta_1)$.

L'équation d'un rayon du plan $\Sigma = \Sigma_1$ parallèle à $(\alpha_1 - \beta_1)$, est

$$\delta = \rho_1 + c\alpha_1 + u\,(\alpha_1 - \beta_1),$$

de sorte que les déplacements de ses points sont

$$\delta = c\delta_3 + u\,(\alpha_1 + \delta_2 - \beta_1 - \delta_3 - \alpha_1 + \beta_1),$$
$$\delta = c\delta_3.$$

Les déplacements des points d'une droite quelconque du plan $\Sigma = \Sigma_1$ qui est parallèle au vecteur $(\alpha_1 - \beta_1)$ sont égaux. Les déplacements des points du plan Σ sont perpendiculaires à la droite sans déplacement et, en grandeur, directement proportionnels aux distances desdits points à cette droite. La droite qui passe par le point A_1 et qui est parallèle à $(\alpha_1 - \beta_1)$ est ainsi un axe de rotation quant au transport du plan Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2.

Remplaçons l'ancien axe de rotation par le nouveau et conservons la notation du § 7, nous avons pour le mouvement du point C

$$\chi'_2 = \cos w\chi'_1 + \sin w \,|\, (\varepsilon\chi'_1),$$
$$\delta_3 = (\cos w - 1)\,\chi'_1 + \sin w \,|\, (\varepsilon\,\chi'_1)\,;\; \varepsilon = (\alpha_3 - \beta_1) : \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2},$$
$$2 \sin \frac{1}{2}\, w = (\sqrt{\delta_3^2} : h'_1),$$

équation qui nous donne l'amplitude de la rotation.

§ 8'. — Si les déplacements du plan Σ sont infiniment petits, on a $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = d\rho_3$ et l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$d\rho = (n + p)\, d\rho_3,$$

on a pour la vitesse

$$\bar{v} = (n + p)\, \bar{v}_3,$$

l'équation de l'axe de rotation est

$$\rho = \rho_1 + u\,(\alpha_1 - \beta_1).$$

et l'amplitude de la rotation ainsi que la vitesse angulaire du plan Σ sont

$$dw = (\sqrt{d\rho_3^2} : h'_1) = (ds_3 : h'_1), \qquad w = (v_3 : h'_1).$$

§ 9. — Si trois points du plan Σ, non situés en ligne droite, sont fixes, on a $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ et par suite $\delta = 0$. Le plan ne peut subir aucun déplacement.

§ 10. — Soit maintenant un plan Σ, dont aucun point n'est fixe et qui doit passer d'une position Σ_1 à une position Σ_2.

L'hodographe du système des déplacements du système plan de points Σ a présentement l'équation

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 + (n\delta_\alpha + p\delta_\beta) \\ &= (n\delta_\alpha + p\delta_\beta) + \delta_1, \end{aligned}$$

Le système des déplacements se compose de deux parties, d'abord du système

$$\delta_1 = \delta_1,$$

d'une translation commune δ_1 à tous les points du plan, et du système

$$\delta = (n\delta_\alpha + p\delta_\beta),$$

dont les vecteurs du déplacement sont parallèles au plan de l'hodographe et qui d'après le § 6 donne une rotation autour d'un axe. Nous pouvons écrire

$$\delta = \delta_1 + \delta_r = \delta_r + \delta_1,$$

et cette équation nous montre que l'ordre dans la suite de la translation et de la rotation, dans le mouvement du plan Σ d'une position Σ_1, est absolument indifférent.

Le point $A = A_1$ ne possède que la translation $\delta_1 = \overline{A_1 A_2}$. Soient, si nous posons

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_1, \\ \delta_2 - \delta_1 &= \tilde{\omega}_2, \\ \delta_3 - \delta_1 &= \tilde{\omega}_3, \\ \delta_4 - \delta_1 &= \tilde{\omega}_4, \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \delta - \delta_1 &= \tilde{\omega}, \end{aligned}$$

$\omega_2, \omega_3, \omega_4, .., \omega$ les déplacements des points B, C, D, ...U du plan Σ parallèles au plan de l'hodographe du système des déplacements lequel à présent ne passe pas par son pôle, ces déplacements pouvant être engendrés par la rotation du plan Σ autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ passant par le point $A \equiv A_1$ et perpendiculaire au plan de l'hodographe. Chaque point du plan possède en outre la translation δ_1.

Prenons à présent le pôle des coordonnées sur cet axe, coïncidant avec le point A_1; avec les notations précédentes le radius vector d'un point arbitraire du plan Σ, qui passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, est

$$\rho_2 = (\varepsilon \mid \rho_1)\,\varepsilon + \cos w\,(\varepsilon\rho_1) \mid \varepsilon + \sin w \mid (\varepsilon\rho_1) + \delta_1,$$

le déplacement total du point est

$$\delta = (\rho_2 - \rho_1) = (1 - \cos w) \left\{ (\varepsilon \mid \rho_1)\,\varepsilon - \rho_1 \right\} + \sin w \mid (\varepsilon\rho_1) + \delta_1,$$

ou, avec $\rho_1 = u\,\varepsilon + \chi_1$, $\rho_2 = u\,\varepsilon + \chi_2$, $(\varepsilon \mid \chi_1) = (\varepsilon \mid \chi_2) = 0$,

$$\chi_2 = \cos w\,\chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1) + \delta_1,$$
$$\delta = (\chi_2 - \chi_1) = (\cos w - 1)\,\chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1) + \delta_1.$$

Il suit de là pour l'amplitude de la rotation

$$\delta_2 = (1 - \cos w) \left\{ (\varepsilon \mid \alpha_1)\,\varepsilon - \alpha_1 \right\} + \sin w \mid (\varepsilon\alpha_1) + \delta_1,$$

d'où

$$\delta_2\,\alpha = \delta_2 - \delta_1 = (\cos w - 1)\,\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1),$$

de sorte qu'enfin

$$\sin \frac{1}{2} w = \left(\sqrt{(\delta_2 - \delta_1)^2} : 2h'_1\right).$$

Comme le mouvement du système plan Σ est équivalent à une rotation autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ passant par le point $A \equiv A_1$ et à une translation inclinée sur cet axe, il est aussi équivalent à une rotation autour d'un axe parallèle à ε, passant par un point quelconque du plan $\Sigma \equiv \Sigma_1$, avec la même amplitude, et à une translation du plan qui est égale au déplacement total de ce point.

« Le mouvement d'un plan Σ, qui passe d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2, est équivalent à une rotation autour d'un axe $\bar{\varepsilon}$ passant par un quelconque de ses points perpendiculairement au plan de l'hodographe du système des déplacements des points du plan Σ et à une translation de tous ses points. L'amplitude de la rotation est égale à l'angle des plans Σ_1 et Σ_2. La translation est égale au déplacement total du point du plan par lequel passe l'axe de rotation. Avec le point de réduction $(A \equiv A_1)$ du système des déplacements du plan Σ varient en général la translation et la position de l'axe de rotation mais non sa direction, l'amplitude de la rotation est la même pour toutes les réductions du système des déplacements. L'ordre de suite de la rotation et de la translation est arbitraire ; elles peuvent donc avoir lieu en même temps.

Si nous choisissons le point qui a le plus petit déplacement δ_0 comme point de réduction, les translations de points du plan Σ sont parallèles à l'axe $\bar{\varepsilon}_s$ qui passe par ce point et égales à δ_0.

Le mouvement du plan Σ est d'après cela un mouvement de vis dont l'axe a l'équation

$$\rho_s = a'\rho_1 + b'\rho_2 + c'\rho_3 + u \mid (\delta_\alpha \delta_\beta).$$

C'est le mouvement le plus simple pour le transport du plan Σ d'une position Σ_1 à une position Σ_2.

§ 10'. — Si tous les points du plan Σ subissent des déplacements infiniment petits, l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$\begin{aligned} d\rho &= d\rho_1 + (nd\alpha + p\beta) \\ &= (nd\alpha + pd\beta) + d\rho_1, \end{aligned}$$

il se compose de deux parties

$$d\rho_1 = d\rho_1, \qquad d\rho_r = (nd\alpha + pd\beta).$$

La première partie peut être engendrée par la translation infiniment petite $d\rho_1$ de tous les points du plan, la deuxième partie par une rotation infiniment petite autour de l'axe passant par le point $A \equiv A_1$ et parallèle au vecteur de position du plan de l'hodographe du système des déplacements.

L'équation de l'hodographe du système des vitesses des points du plan est

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + n(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + p(\bar{v}_3 - \bar{v}_1),$$

ou

$$\bar{v} = (1 - n - p)\,\bar{v}_1 + n\bar{v}_2 + p\bar{v}_3,$$

elle se décompose en systèmes partiels

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1, \qquad \bar{v}_r = n\bar{v}_2 + p\bar{v}_3 - (n+p)\,\bar{v}_1$$

c'est-à-dire en un système de vitesses de translation et de rotation.

L'amplitude de la rotation est donnée par

$$dw = \frac{\sqrt{(d\rho_2 - d\rho_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\alpha_1)^2}} = \frac{\sqrt{(d\rho_2 - d\rho_1)^2}}{h'_1},$$

et la vitesse angulaire autour desdits axes est

$$w = \frac{1}{h'_1}\sqrt{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^2}.$$

Revenant à l'équivalence du mouvement du plan, le théorème donné précédemment est valable ici ; l'équation de l'axe $\bar{\varepsilon}_{s1}$ pour un mouvement de vis du plan est

$$\rho_s = a'\rho_1 + b'\rho_2 + c'\rho_3 + u\,|\,[(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)\,(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)].$$

On déduira sans difficulté les cas spéciaux déjà traités des résultats des deux derniers paragraphes.

Ferdinand Kraft (Zürich).