

LA FORMULE DE STOKES

Autor(en): **Silva, Otto A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-6639>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le conjugué d' du point d_x donne alors la distance

$$p' = \frac{m'n'(m-n)}{mn' - m'n} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

L. CRELIER (Bienne, Suisse).

LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0 (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_S \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) n \right) dw$$

dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z , finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément dw de la surface.

Nous poserons

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \\ z &= h(u, v), \end{aligned}$$

de telle sorte que ce soient

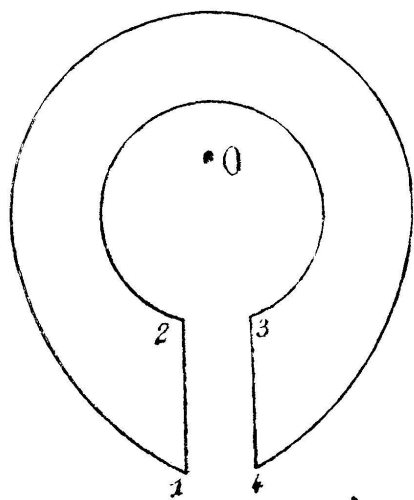
$$\begin{aligned} x &= f(v_1, u), \text{ etc.} \\ x &= f(v_2, u), \text{ etc.} \end{aligned}$$

les équations des courbes 1-2 et 3-4,

et

$$\begin{aligned} x &= f(v, u_1), \text{ etc.} \\ x &= f(v, u_2), \text{ etc.} \end{aligned}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.



Nous aurons évidemment

$$\int_0^1 (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u} \right) du$$

$$- \int_{v_1}^{v_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv + \int_{v_1}^{v_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv$$

$$- \int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv.$$

Mais d'un autre côté, on a

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) dudv$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \sum \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} dudv + \int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dudv.$$

L'intégration par parties donne d'ailleurs

$$\int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dudv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_1} dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} dudv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v} dudv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} dudv.$$

En faisant les substitutions et les réductions on aura

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) dudv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_1} dv$$

$$+ \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \frac{D(y,z)}{D(u,v)} +$$

$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \} dudv.$$

En intégrant cette expression entre les limites v_1 et v_2 on a

$$\begin{aligned} & \int_{u_1}^{(v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) du - \int_{u_1}^{(v_2)} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) du \\ & + \int_{v_2}^{(u_1)} \int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + \dots \right) dv - \int_{v_2}^{(u_2)} \int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + \dots \right) dv \\ & = \int_{v_2}^{v_1} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + \dots \right\} dudv. \end{aligned}$$

Le premier membre est l'intégrale le long du contour; le deuxième celle relative à la surface y comprise.

En désignant par l, m, n , les cosinus directeurs de la normale, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (Xdx + Ydy + Zdz) \\ & = \int_s \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) n \right\} ds. \end{aligned}$$

Il faut rapprocher maintenant les deux courbes 1-2 et 3-4, et réduire le petit contour 2-3 à un point.

OTTO A. SILVA (Rio de Janeiro).