L'ALGEBRE DU CALCUL

Autor(en): **Renton, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6640

L'ALGÈBRE DU CALCUL

Depuis son origine, il y a plus de deux siècles, on a cherché à donner au Calcul infinitésimal une base purement arithmétique. Avant d'exposer une méthode des plus simples pour atteindre ce but, *sans limites ni infinitésimales*, nous allons démontrer que la méthode en vogue est non seulement incommode mais erronée, en tant qu'elle repose sur la contradiction dont on s'est servi pour établir la loi de la dérivation partielle, loi d'autant plus fondamentale qu'elle contient celles de l'addition et la multiplication des dérivées comme cas particuliers : ce que l'on n'a pas même remarqué.

Si par exemple $u = f(v, \omega)$, où $v = sin x$, $\omega = e^x$, on obtient $\left(\frac{du}{dv}\right)$ en regardant la première comme variable, la seconde comme constante : ce qui est impossible, *à moins que x ne soit en même temps variable et constant...*

Nous ne tarderons pas à préciser en le généralisant le vrai procédé de la dérivation partielle, déguisé sous cette sophistique puérile, en posant cette notation et ces définitions préalables.

1. Par

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

il est entendu que $a = c$, $b = d$, en distinguant toujours une fraction d'un quotient, ainsi :

$$\frac{x + x}{1 + 1} = \frac{2x}{2}.$$

2. Par

$$u = u_v, \; u = u_{v,w} \; u = u_{v_x}, \text{ etc.}$$

on entend u est fonction de v, u est fonction de v et de w, u est fonction de v, qui est fonction de x, etc.

3. Soit

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 \ldots \omega_1 + \alpha_2\beta_2 \ldots \omega_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n \ldots \omega_n &\equiv \\ u_1 \quad + \quad u_2 \quad + \ldots + \quad u_n &\equiv \overset{1}{u} \end{aligned} \tag{a}$$

et nommons cette série ou son équivalent symbolique $\overset{1}{u}$ (dont le *module*, 1, indique que *tous* les n termes y sont compris) un *résultant*.

Si $n = p + q$, et si l'on supprime les termes d'ordre q, de sorte que l'on ait

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_p \equiv \overset{(1)}{u} \tag{b}$$

où le module $(1) = p : n$, le résultant se dit *partiel* par rapport au premier.

Ainsi l'on a en général

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{nM} \equiv \overset{M}{u} \tag{c}$$

en posant

$$M = \frac{p + qo^{m-1}}{p + q} \tag{d}$$

où m est un entier à déterminer. Le cas où $m > 1$ et par conséquent $qo^{m-1} = o$ est analogue à celui d'un déterminant (qui n'est qu'une espèce de résultant) où l'on multiplie des termes par des éléments-zéro.

4. Toute autre série, *ayant même nombre de termes*,

$${}_1u + {}_2u + \ldots + {}_{nM}u \equiv \underset{M}{u} \tag{e}$$

se nomme, ainsi que la première, un *co-résultant*.

5. Si tout terme de la série est fonction de x, on la nomme *résultant en x*, en l'écrivant ainsi

$$\begin{aligned} u_{x1} + u_{x2} + \ldots + u_{x_{nX}} &\equiv \overset{X}{u_x} \\ {}_1u_x + {}_2u_x + \ldots + {}_{nX}u_x &\equiv \underset{X}{u_x} \end{aligned} \tag{f}$$

où le module se conforme à la lettre de la sous-fonction; et tout résultant se dit *homonyme* ou *hétéronyme* selon que la fonction et la sous-fonction sont identiques ou non, en entendant d'ailleurs que tout produit d'un résultant homonyme ou hétéronyme se dit aussi homonyme ou hétéronyme.

6. Si en particulier pour toute valeur de x

$$\frac{\overset{\mathrm{X}}{u_x}}{\underset{\mathrm{X}}{u_x}} = \frac{u}{x}$$

où u est fonction de x, on nomme le résultant *co-résultant de u par rapport à x*. Et il est évident que si par exemple $u = u_{v_x}$ et l'on peut trouver des co-résultants de u par rapport à v, et de v par rapport à x, on en aura aussi trouvé de u par rapport à x, ainsi

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{\overset{\mathrm{V}}{u_v}}{\underset{\mathrm{V}}{u_v}}\,\frac{\overset{\mathrm{X}}{v_x}}{\underset{\mathrm{X}}{v_x}} = \frac{u_{x_1}}{{}_1u_x} = \frac{\overset{\mathrm{X}}{u_x}}{\underset{\mathrm{X}}{u_x}}.$$

7. *Définition*. — Si $u = u_{v_x}$, w_x.., z_x, où u est fonction immédiate de v, w.. et v, w.. sont des fonctions immédiates de x, et

$$\begin{aligned}\frac{u}{x} &= \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{u}{w}\,\frac{w}{x} = \;.\;.\; = \frac{u}{3}\,\frac{3}{x}\\ &= \frac{\overset{\mathrm{V}}{u_v}}{\underset{\mathrm{V}}{u_v}}\,\frac{\overset{\mathrm{X}}{v_x}}{\underset{\mathrm{X}}{v_x}} = \frac{\overset{\mathrm{W}}{u_w}}{\underset{\mathrm{W}}{u_w}}\,\frac{\overset{\mathrm{X}}{w_x}}{\underset{\mathrm{X}}{w_x}} = \;.\;.\; = \frac{\overset{\mathrm{Z}}{u_z}}{\underset{\mathrm{Z}}{u_z}}\,\frac{\overset{\mathrm{X}}{z_x}}{\underset{\mathrm{X}}{z_x}}\\ &= \frac{\overset{\mathrm{V}}{u_v}\,\overset{\mathrm{X}}{v_x} + \overset{\mathrm{W}}{u_w}\,\overset{\mathrm{X}}{w_x} + \;.\;.\; + \overset{\mathrm{Z}}{u_z}\,\overset{\mathrm{X}}{z_x}}{\underset{\mathrm{V}}{u_v}\,\underset{\mathrm{X}}{v_x} + \underset{\mathrm{W}}{u_w}\,\underset{\mathrm{X}}{w_x} + \;.\;.\; + \underset{\mathrm{Z}}{u_z}\,\underset{\mathrm{X}}{z_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}}\end{aligned}$$

et si dans tout module $\mathrm{M} = \dfrac{p + qo^{m-1}}{p+q}$ on suppose p le nombre des termes *homonymes*, m le nombre des *sous-fonctions immédiates* d'une fonction donnée, de sorte que

$$\frac{\overset{\mathrm{V}}{u_v}\,\overset{1}{v_x} + \overset{\mathrm{W}}{u_w}\,\overset{1}{w_x} + \;.\;.\; + \overset{\mathrm{Z}}{u_z}\,\overset{1}{z_x}}{\underset{\mathrm{V}}{u_v}\,\underset{1}{v_x} + \underset{\mathrm{W}}{u_w}\,\underset{1}{w_x} + \;.\;.\; + \underset{\mathrm{Z}}{u_z}\,\underset{1}{z_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_v}} \tag{g}$$

les co-résultants à droite se nomment respectivement *la dérivée et le dérivant de u par rapport à x*, et en même temps tout résultant particulier dont ils se composent se nomme *la dérivée* ou *le dérivant* (total ou partiel selon le cas) *de sa fonction respective par rapport à sa sous-fonction.*

8. De la formule (g) toutes les règles ordinaires de la dérivation se déduisent au premier coup d'œil ; et il est à remarquer que quelles que soient les valeurs de v, w, etc., on a toujours

$$V.1 + W.1 + .. + Z.1 = 1 \qquad (h)$$

c'est-à-dire *le résultant des modules est le module du co-résultant.*

9. Ainsi pour $u = u_{v_x}$, où m_u, le nombre de sous-fonctions immédiates de u, est l'unité, on a

$$\frac{\overset{1}{u_v}\,\overset{1}{v_x}}{\underset{1}{u_v}\,\underset{1}{v_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \qquad (A)$$

d'où, en posant $u = v$,

$$\overset{1}{u_u}\,\overset{1}{u_x} = \overset{1}{u_x},\quad \underset{1}{u_u}\,\underset{1}{v_x} = \underset{1}{u_x}$$

et par conséquent $\overset{1}{u_u} = \underset{1}{u_u} = 1$, etc.

De même pour $u = u_{v_{w_x}}$, $m_u = m_v = 1$, et l'on a

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{\omega}\,\frac{\omega}{x} \doteq \frac{\overset{1}{u_v}\,\overset{1}{v_w}\,\overset{1}{w_x}}{\underset{1}{u_v}\,\underset{1}{v_w}\,\underset{1}{w_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}}$$

et ainsi de suite.

10. Pour $u = u_{v_x}, w_x$, $m_u = 2$, et l'on a

$$\frac{\overset{(1)}{u_v}\,\overset{1}{v_x} + \overset{(1)}{u_\omega}\,\overset{1}{w_x}}{\underset{(1)}{u_v}\,\underset{1}{v_x} + \underset{(1)}{u_\omega}\,\underset{1}{w_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \qquad (B)$$

d'où en posant $\omega = x$,

$$\overset{(1)}{u_v}\,\overset{1}{v_x} + \overset{(1)}{u_x} = \overset{1}{u_x}$$

et, pour $\overset{1}{u_x} = 0$, $\overset{1}{v_x} = -\overset{(1)}{u_x} : \overset{(1)}{u}$.

11. Pour $u = v + w$, on a

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{u}{w}\cdot\frac{w}{x}$$

$$= \frac{v + w}{v}\,\frac{\overset{1}{v_x}}{\underset{1}{v_x}} = \frac{v + w}{w}\,\frac{\overset{1}{w_x}}{\underset{1}{w_x}}$$

$$= \frac{\overset{1}{v_x} + \overset{1}{w_x}}{\dfrac{\underset{1}{v v_x} + \underset{1}{\omega w_x}}{v + w}} \equiv \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \equiv \frac{\overset{1}{v + w}}{\underset{1}{v + w}} \qquad \text{(C)}$$

en divisant le dénominateur par $v + w$ au lieu de multiplier le numérateur, pour ne pas être en contravention avec la définition du § 4, puisque le produit de deux binômes est quadrinôme tandis que leur quotient est binôme. Et puisque

$$\overset{1}{u_x} = \overset{1}{v_x} + \overset{1}{w_x},$$

$$\overset{1}{u_v} = \overset{1}{v_v} + \overset{1}{w_v}, \quad \overset{1}{u_\omega} = \overset{1}{v_\omega} + \overset{1}{w_\omega},$$

$$\overset{(1)}{u_v} = \overset{1}{v_v} + \overset{1}{w_v}\, o, \quad \overset{(1)}{u_\omega} = \overset{1}{v_\omega}\, o + \overset{1}{\omega_w}$$

en multipliant tout terme *hétéronyme* par o^{2-1}. Par conséquent $(1) = \frac{1}{2}$, et

$$\overset{\frac{1}{2}}{u_v}\overset{1}{v_x} + \overset{\frac{1}{2}}{u_\omega}\overset{1}{w_x} = \overset{1}{v_x} + \overset{1}{w_x}$$

ce qu'il faut constater. De même pour le dérivant. Et en général

$$\frac{\overset{\frac{1}{n}}{u_v}\overset{1}{v_x} + \ldots + \overset{\frac{1}{n}}{u_z}\overset{1}{z_x}}{\underset{\frac{1}{n}}{u_v}\underset{1}{v_x} + \ldots + \underset{\frac{1}{n}}{u_z}\underset{1}{z_x}} \equiv \frac{\overset{1}{v_x} + \ldots + \overset{1}{z_x}}{\frac{v}{u}\underset{1}{v_x} + \ldots + \frac{z}{u}\underset{1}{z_x}}$$

12. Pour $u = vw$ on a

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{u}{w}\,\frac{w}{x}$$

$$= \frac{vw}{v}\,\frac{\overset{1}{v_x}}{\underset{1}{v_x}} = \frac{vw}{w}\,\frac{\overset{1}{w_x}}{\underset{1}{w_x}}$$

$$= \frac{w\overset{1}{v_x} + v\overset{1}{w_x}}{\underset{1}{v_x} + \underset{1}{w_x}} \equiv \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \equiv \frac{\overset{1}{v \times w}}{\underset{1}{v \times w}} \qquad \text{(D)}$$

Et en général

$$\frac{\overset{\frac{1}{n}}{u_0}\overset{1}{v_x} + \dots + \overset{\frac{1}{n}}{u_z}\overset{1}{z_x}}{\underset{\frac{1}{n}}{u_0}\underset{1}{v_x} + \dots + \underset{\frac{1}{n}}{u_z}\underset{1}{z_x}} = \frac{w \dots z\overset{1}{v_x} + \dots + v \dots yz}{\underset{1}{v_x} + \dots + \underset{1}{z_x}}$$

13. Pour $u = v : w$ on a

$$\frac{\overset{1}{v_x} : w - v\overset{1}{w_x} : w^2}{\underset{1}{v_x} - \underset{1}{w_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} = \frac{\overset{1}{v : w}}{\underset{1}{v : w}}$$

D'où deux corollaires importants.

α. La dérivée d'une constante est nulle.
Ainsi

$$\overset{1}{1} = \overset{1}{v : v} = \frac{\overset{1}{v}}{v} - \frac{v\overset{1}{v}}{v^2} = 0$$

$$\overset{1}{n} = \overset{1}{1} + \overset{1}{1} + \dots + \overset{1}{1} = 0 + 0 + \dots + 0 = n0$$

De même $\overset{1}{m} = m0$, et $\overset{1}{n : m} = \frac{n}{m}\,0$. Donc $\overset{1}{c} = c.0$. Q.E.D.

β. Le quotient de deux fonctions évanouissantes est le quotient de leurs dérivées. Puisqu'une constante a la même valeur pendant deux instants consécutifs, et qu'il est impossible de changer de signe en moins de deux instants, toute fonction qui change de signe en passant par zéro est constante : et comme le quotient de deux constantes est constant, $\frac{v}{w}$ est constant, en écrivant ainsi la fraction pour la distinguer de $v : w$, dont la valeur est *générale*. En égalant et différentiant ces deux expresions on a

$$v : w = \frac{v}{w}$$

$$\frac{\overset{1}{v}}{w} - \frac{v\overset{1}{w}}{w^2} = \frac{v}{w}\,0$$

d'où

$$\frac{\overset{1}{v}}{v} - \frac{\overset{1}{w}}{w} = 0$$

et

$$\frac{v}{w} = \frac{\overset{1}{v}}{\overset{1}{w}}, \text{ Q. E. D.}$$

14. En appliquant ces règles aux fonctions fondamentales x^n, a^x, sin_x, etc, on a

$$\frac{x^n}{x} = \frac{x_1^{n-1}}{1} = \ldots = \frac{x_n^{n-1}}{n^1} = \frac{nx^{n-1}}{n} \equiv \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \qquad (\alpha)$$

Ainsi

$$\frac{x^n}{x} \equiv \frac{x^{a+b}}{x} \equiv \frac{x^a x^b}{x}$$

$$\frac{nx^{n-1}}{n} \equiv \frac{(a+b)\, x^{a+b-1}}{a+b} \equiv \frac{x^b a x^{a-1} + x^a b x^{b-1}}{a+b}.$$

$$\frac{a^x}{x} = \frac{a^x \mathrm{A}}{x\mathrm{A}} \equiv \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \qquad (\beta)$$

où $\mathrm{A} = \log a$, et $x\mathrm{A} = \mathrm{U}_a\, \mathrm{A}_e = \mathrm{U}_e$. Ainsi

$$a^x = 1 + \mathrm{A}x + \mathrm{A}^2 \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$\overset{1}{a^x} = 0 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 x + \ldots = a^x \mathrm{A}.$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x \cot x} \equiv \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}}. \qquad (\gamma)$$

Ainsi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\overset{1}{s_x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \cos x$$

Et ainsi de suite.

15. Pour *la dérivation successive* on emploie le module n ou (n), selon que l'opération est totale ou partielle. Ainsi

$$\overset{2}{u}_{v_x} = \overset{2}{u}_{x_v} - \overset{1}{u}_v \overset{2}{v}_x \overset{1}{x}_v$$

$$\overset{(2)}{u}_{v_x} = \overset{(2)}{u}_{x_v}$$

On démontre la première égalité en différentiant les identités

$$\overset{1}{u}_v = \overset{1}{u}_x \overset{1}{x}_v, \quad \overset{1}{u}_x = \overset{1}{u}_v \overset{1}{v}_x$$

la première par rapport à x, la seconde par rapport à v, ce qui donne

$$\overset{2}{u}_{v_x} = \overset{2}{u}_v \overset{1}{v}_x = \overset{2}{u}_x \overset{1}{x}_v + \overset{1}{u}_x \overset{2}{x}_v \overset{1}{v}_x$$

$$\overset{2}{u}_{x_v} = \overset{2}{u}_x \overset{1}{x}_v = \overset{2}{u}_v \overset{1}{v}_x + \overset{1}{u}_v \overset{2}{v}_x \overset{1}{x}_v$$

d'où

$$\overset{1}{u}_x \overset{2}{x}_v \overset{1}{v}_x + \overset{1}{u}_v \overset{2}{v}_x \overset{1}{x}_v = 0.$$

16. Pour *l'intégration successive*, opération qui ne paraît pas reconnue dans les mathématiques, on emploie le module n, en nommant toute fonction *l'intégrale de sa dérivée* ou *l'intégrant de son dérivant* par rapport à une sous-fonction quelconque ; c'est-à-dire $u = \overset{1\,-1}{u} = \underset{1\,-1}{u}$. Ainsi dans ce que l'on peut nommer le développement intégro-différentiel ou *intérentiel*

$$\bar{u} \equiv \overset{0}{u}_x \overset{0}{w}_v + \overset{1}{u}_x \overset{-1}{w}_v + \overset{2}{u}_x \overset{-2}{w}_v + ..$$

on n'a qu'à mettre $w = 1$ pour avoir

$$u_{x+v} = u_x + \overset{1}{u}_x v + \overset{2}{u}_x \frac{v^2}{2!} + ..$$

le soi-disant théorème de Taylor. De même on a

$$u \equiv \underset{0\,0}{uw} + \underset{1\,-1}{uw} + \underset{2\,-2}{uw} + ..$$

17. Deux fonctions v, ω se nomment *paronymes* si l'on a $\overset{1}{v} = \omega$. Ainsi $\overset{1}{x^2 : 2} = x = e^x$.

18. Quant à la notation que nous avons ébauchée, elle se rattache évidemment à celle de Newton, d'ailleurs vague et défectueuse, à laquelle nous avons cherché à donner une base rationnelle, en regardant la dérivée tout simplement comme *la*

somme des numérateurs d'un nombre convenu de fractions égales, idée aussi étrangère en elle-même à l'algorithme de Newton qu'au $du : dx$ de Leibniz, qui n'a aucun sens, et que l'on ne rend intelligible qu'en le transformant en $du : x$, ou d, coefficient algébrique, est le *dérivant* de la fonction, comme nous venons de le définir. Ainsi

$$\overset{1}{u}_x = \underset{1}{u_x} \frac{u}{x}$$

puisque toute tangente (pour nous rappeler l'origine géométrique de ce genre de calcul) n'est que le quotient $u : x$ multiplié par un *tenseur* arithmétique qui dépend de la forme de u. Et c'est au moyen de cette fonction *auxiliaire*, dont le logarithme bien entendu n'est qu'un cas particulier, que l'on parvient à établir les règles du Calcul, et à remplacer par un mécanisme simple et symétrique un pêle-mêle de procédés artificiels dont l'empirisme et la sophistique font le scandale de la science. En effet comme l'addition mène à l'idée de la multiplication, et celle-ci à l'idée du logarithme, ainsi

$$\begin{gathered} {}_0a + {}_1a + \ldots + {}_na = na \\ a_0 \times a_1 \times \ldots \times a_n = a^n \end{gathered}$$

d'où ${}_0a = oa$, $a_0 = a^0$, on n'a qu'à généraliser le logarithme pour arriver à l'idée du dérivant, qui à son tour mène à celle de la dérivée.

W. RENTON (Newcaste, Angleterre).