I. — Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN PLAN INVARIABLE Σ PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2.

I. — *Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.*

§ 1. — Les déplacements de trois ou d'un plus grand nombre de points d'une ligne droite σ qui, d'une manière quelconque, passe d'une position σ_1 à une position σ_2 ne sont pas indépendants; nous allons montrer qu'il y a une relation entre eux. Il existe entre les déplacements des points d'un système Σ à trois dimensions quand il est transporté d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position quelconque Σ_2, des relations semblables valables de manière générale et que nous développerons d'abord.

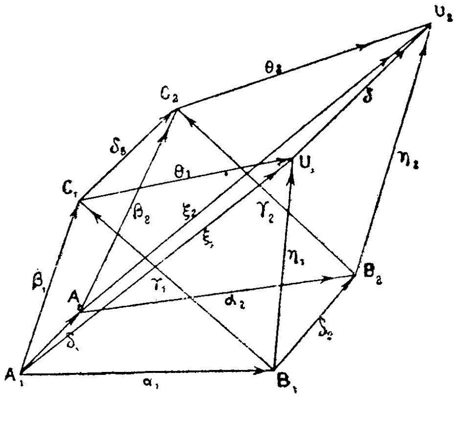

Fig. 1.

Soient A, B, C et U quatre points d'un système invariable de l'espace formant les sommets d'une pyramide arbitraire, de sorte que A, B, C, U; A_1, B_1, C_1, U_1 et A_2, B_2, C_2, U_2 sont les pyramides congruentes homologues de Σ, Σ_1 et Σ_2.

Nous posons (fig. 1).

$$\overline{A_1B_1} = \alpha_1,\ \overline{A_1C_1} = \beta_1,\ \overline{B_1C_1} = \gamma_1,\ \overline{A_1U_1} = \xi_1,\ \overline{B_1U_1} = \eta_1,\ \overline{C_1U_1} = \theta_1,$$

$$\overline{A_2B_2} = \alpha_2,\ \overline{A_2C_2} = \beta_2,\ \overline{B_2C_2} = \gamma_2,\ \overline{A_2U_2} = \xi_2,\ \overline{B_2U_2} = \eta_2,\ \overline{C_2U_2} = \theta_2,$$

$$\overline{A_1A_2} = \delta_1,\ \overline{B_1B_2} = \delta_2,\ \overline{C_1C_2} = \delta_3,\ \overline{U_1U_2} = \delta.$$

Comme Σ_1 et Σ_2 sont des systèmes congruents, le produit intérieur de deux vecteurs de Σ_1 est égal au produit intérieur des vecteurs homologues de Σ_2.

Donc, on peut écrire

$$\alpha_1 | \beta_1 = \alpha_2 | \beta_2;$$

mais nous avons

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_\alpha = \alpha_1 + \delta_2 - \delta_1,$$
$$\beta_2 = \beta_1 + \delta_\beta = \beta_1 + \delta_3 - \delta_1,$$

et aussi avec cela

$$\alpha_1 | (\beta_2 - \delta_\beta) = (\alpha_1 + \delta_\alpha) | \beta_2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0,$$

ou

$$\alpha_1 | (\delta_3 - \delta_1) + \beta_2 | (\delta_2 - \delta_1) = 0,$$

ou enfin

$$\alpha_1 | \delta_3 + \beta_2 | \delta_2 = (\alpha_1 + \beta_2) | \delta_1.$$

De même nous trouvons

$$\alpha_2 | \delta_\beta + \beta_1 | \delta_\alpha = 0,$$
$$\alpha_2 | \delta_3 + \beta_1 | \delta_2 = (\alpha_2 + \beta_1) | \delta_1.$$

De plus on a la relation

$$\xi_1 | \gamma_1 = \xi_2 | \gamma_2;$$

mais nous avons

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \delta_\gamma = \gamma_2 - \delta_3 + \delta_2, \qquad \xi_2 = \xi_1 + \delta_\xi = \xi_1 + \delta - \delta_1$$

de sorte que

$$\xi_1 | (\gamma_2 - \delta_\gamma) = (\xi_1 + \delta_\xi) | \gamma_2,$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 | \delta_\gamma + \gamma_2 | \delta_\xi = 0,$$

ou

$$\xi_1 | (\delta_3 - \delta_2) + \gamma_2 | (\delta - \delta_1) = 0$$

ou enfin

$$\xi_1 | \delta_3 + \gamma_2 | \delta = \xi_1 | \delta_2 + \gamma_2 | \delta_1.$$

De manière semblable s'obtiennent les relations

$$\gamma_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\gamma = 0,$$
$$\gamma_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \gamma_1 \mid \delta_1 + \xi_2 \mid \delta_2 ;$$
$$\beta_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\beta = 0,$$
$$\beta_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \beta_1 \mid \delta_2 + \xi_2 \mid \delta_1 ;$$
$$\alpha_1 \mid \delta_\theta + \theta_2 \mid \delta_\alpha = 0,$$
$$\alpha_1 \mid \delta + \theta_2 \mid \delta_2 = \alpha_1 \mid \delta_3 + \theta_2 \mid \delta_1 .$$

En outre, pour les vecteurs du système on a les relations

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (\beta_1 + \beta_2) \mid \delta_\beta = 0, \ldots$$

et aussi par suite

$$(2\alpha_1 + \delta_\alpha) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (2\beta_1 + \delta_\beta) \mid \delta_\beta = 0, \ldots$$

ou

$$2\alpha_1 \mid \delta_\alpha + \delta_\alpha{}^2 = 0, \qquad 2\beta_1 \mid \delta_\beta + \delta_\beta{}^2 = 0, \ldots$$

Multiplions la première de ces équations par $\delta_\beta{}^2$, la seconde par $\delta_\alpha{}^2$, il vient

$$2\,(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta{}^2 + \delta_\alpha{}^2 \delta_\beta{}^2 = 0, \qquad 2\,(\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha{}^2 + \delta_\alpha{}^2 \delta_\beta{}^2 = 0,$$

et en combinant ces relations par addition et soustraction, on obtient les importantes relations

$$(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta{}^2 + (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha{}^2 + \delta_\alpha{}^2 \delta_\beta{}^2 = 0,$$
$$(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta{}^2 - (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha{}^2 = 0.$$

On voit d'après cela que les déplacements de quatre points quelconques et plus du système Σ dépendent l'un de l'autre.

§ 1'. — Si les déplacements des points A, B, C et U du système Σ sont infiniment petits, il résulte des formules du § 1, si nous négligeons les grandeurs infiniment petites d'ordre supérieur devant celles d'ordre moindre,

$$\alpha_1 \mid d\beta + \beta_1 \mid d\alpha = 0,$$
$$\alpha_1 \mid d\rho_3 + \beta_1 d\rho_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \beta_1 \mid \overline{v_2} = (\alpha_1 + \beta_1) \mid \overline{v_1} ;$$
$$\xi_1 \mid d\gamma + \gamma_1 \mid \delta\xi = 0,$$
$$\xi_1 \mid d\rho_3 + \gamma_1 \mid d\rho = \xi_1 \mid d\rho_2 + \gamma_1 \mid d\rho_1, \qquad \xi_1 \mid \overline{v_3} + \gamma_1 \mid \overline{v} = \xi_1 \mid \overline{v_2} + \gamma_1 \mid \overline{v_1} ;$$
$$\beta_1 \mid d\rho + \eta_1 \mid d\rho_3 = \beta_1 \mid d\rho_2 + \eta_1 \mid d\rho_1, \qquad \beta_1 \mid \overline{v} + \overline{\eta_1} \mid \overline{v_3} = \beta_1 \mid \overline{v_2} + \eta_1 \mid \overline{v_1} ;$$
$$\alpha_1 \mid d\rho + \theta_1 \mid d\rho_2 = \alpha_1 \mid d\rho_3 + \theta_1 \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v} + \theta_1 \mid \overline{v_2} = \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \theta_1 \mid \overline{v_1} .$$

Les relations ainsi développées, qui peuvent facilement se traduire en langage ordinaire, sont évidemment encore valables, si les quatre points sont situés dans un plan.

II. — *Le plan ou champ des points.*

§ 2. — Soient $A_1 = O + \rho_1$, $B_1 = O + \rho_2$, $C_1 = O + \rho_3$, trois points situés non en ligne droite dans le même plan et soit $U_1 = O + \rho$ un point arbitraire du même plan. Avec le point O comme pôle de coordonnées, l'équation du radius vector de ce plan est

$$\rho = m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3, \qquad m + n + p = 1,$$

ou aussi

$$\rho = \rho_1 + n(\rho_2 - \rho_1) + p(\rho_3 - \rho_1),$$

et si nous posons

$$(\rho_2 - \rho_1) = \alpha_1, \qquad (\rho_3 - \rho_1) = \beta_1,$$

cette équation devient

$$\rho = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1.$$

Soit maintenant d'une manière quelconque le plan Σ transporté de la position Σ_1, pour laquelle nous avons écrit l'équation, à la position Σ_2.

Si le plan Σ est transporté de la position Σ_1 à la position Σ_2 ses points A, B, C et U subissent les déplacements $\overline{A_1A_2} = \delta_1$, $\overline{B_1B_2} = \delta_2$, $\overline{C_1C_2} = \delta_3$ et $\overline{U_1U_2} = \delta$, de sorte que avec $U_2 = O + \psi$ pour le plan Σ_2 il vient la relation

$$\begin{aligned}\psi = \rho + \delta &= m(\rho_1 + \delta_1) + n(\rho_2 + \delta_2) + p(\rho_3 + \delta_3) \\ &= m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3 + m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3,\end{aligned}$$

ou, avec $m + n + p = 1$,

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n\{(\rho_2 - \rho_1) + (\delta_2 - \delta_1)\} + p\{(\rho_3 - \rho_1) + (\delta_3 - \delta_1)\},$$

ou

$$\psi = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1 + \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1),$$

ou

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n(\alpha_1 + \delta_\alpha) + p(\beta_1 + \delta_\beta),$$