LA LOGIQUE SYMBOLIQUE

LA LOGIQUE SYMBOLIQUE

En général, on regarde la logique symbolique comme une étude très abstraite, très difficile et d'une utilité assez restreinte. Je vais expliquer ici les premiers principes d'un système symbolique qui est, au contraire, extrêmement simple et d'une utilité aussi incontestable que celle des mathématiques.

1. Le symbole A^B indique une *proposition* dont A est le sujet et B le prédicat. Il affirme que A est une des personnes ou des choses, B_1, B_2, B_3, etc. formant la classe B. Le symbole A_B indique l'individu, ou un individu, de la série A_1, A_2, A_3, etc. (formant la classe A), dont on peut affirmer A^B. Le symbole A^C_B veut dire $(A_B)^C$; il indique une proposition dont A_B est le sujet et C le prédicat. Prenons l'exemple suivant : Soit $A = $ Alfred, $B = $ boulanger, $C = $ catholique. Alors

A^B affirme que *Alfred* est *boulanger*, tandis que A_B n'affirme rien; il indique simplement *Alfred* le *boulanger*. Il y a plusieurs personnes, A_1, A_2, etc., dont chacune s'appelle *Alfred*, et le symbole A_B indique l'individu, ou un individu de cette série, qui est *boulanger*.

A^C_B veut dire $(A_B)^C$; il affirme que *Alfred* le *boulanger* (ou le boulanger Alfred) est *catholique*.

A^B_C veut dire $(A_C)^B$; il affirme que *Alfred* le *catholique* est *boulanger*.

B^A_C veut dire $(B_C)^A$; il affirme que le *boulanger catholique* s'appelle *Alfred*.

2. Que le symbole α indique la proposition A^B; et le symbole β la proposition C^D. Alors, $\alpha\beta$ veut dire $A^B C^D$; il affirme A^B

et aussi C^D; tandis que $\alpha + \beta$ veut dire $A^B + C^D$ et n'affirme que l'alternative A^B ou C^D. Par exemple, soit $A = $ *Alfred*, $B = $ *boulanger*, $C = $ *Charles*, $D = $ *docteur*. Alors :

$\alpha\beta$, comme son synonyme $A^B C^D$, affirme que « *Alfred* est *boulanger*, et *Charles*, *docteur* »; tandis que $\alpha + \beta$, comme son synonyme $A^B + C^D$, affirme que « ou *Alfred* est *boulanger* ou *Charles docteur* ». Quant à la question si les deux propositions A^B et C^D sont toutes les deux vraies, l'alternative $A^B + C^D$ ne dit rien; elle affirme simplement que, au moins, *une* des deux propositions est vraie.

3. Avant d'aller plus loin, je vais appliquer ces principes à l'algèbre élémentaire. Soit A et B deux nombres ou fractions; soit $P = $ *positif*; soit $N = $ *négatif*; soit $Z = $ *zéro*. Si nous excluons de notre univers toute quantité imaginaire ou infinie, nous aurons les formules suivantes :

(1) $(AB)^P = A^P B^P + A^N B^N$; (2) $(AB)^N = A^N B^P + A^P B^N$;

(3) $(AB)^Z = A^Z + B^Z = A^Z + (A^P + A^N) B^Z = A^Z (B^P + B^N) + B^Z$;

(4) $(Ax - B)^P = \left\{ A \left(x - \frac{B}{A}\right) \right\}^P = A^P \left(x - \frac{B}{A}\right)^P + A^N \left(x - \frac{B}{A}\right)^N + A^Z B^N$;

(5) $(Ax - B)^N = \left\{ A \left(x - \frac{B}{A}\right) \right\}^N = A^N \left(x - \frac{B}{A}\right)^P + A^P \left(x - \frac{B}{A}\right)^N + A^Z B^P$.

Pour donner un autre exemple, supposons qu'on cherche les limites de x qui résultent des données $3x^2 > \frac{25}{4} x - 3$.

Les données

$$= \left(3x^2 - \frac{25}{4} x + 3\right)^P = (12x^2 - 25x + 12)^P$$

$$= \left\{ (4x - 3)(3x - 4) \right\}^P = (4x - 3)^P (3x - 4)^P + (4x - 3)^N (3x - 4)^N$$

$$= \left(x > \frac{3}{4}\right)\left(x > \frac{4}{3}\right) + \left(x < \frac{3}{4}\right)\left(x < \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(x > \frac{4}{3}\right) + \left(x < \frac{3}{4}\right);$$

car $x > \frac{4}{3}$ implique $x > \frac{3}{4}$, et $x < \frac{3}{4}$ implique $x < \frac{4}{3}$. Donc x doit être ou au-dessus de $\frac{4}{3}$ ou au-dessous de $\frac{3}{4}$. Un dernier exemple pour finir. Des données $x^2 < 9 - a^2$ déduire les limites de x et de a.

Les données

$$= \left\{ x^2 - (9 - a^2) \right\}^N = \left\{ (x - \sqrt{9 - a^2})\,(x + \sqrt{9 - a^2}) \right\}^N$$
$$= (x - \sqrt{9 - a^2})^N (x + \sqrt{9 - a^2})^P (9 - a^2)^P$$
$$= (x - \sqrt{9 - a^2})^N (x + \sqrt{9 - a^2})^P (a^2 - 9)^P$$
$$= (x - \sqrt{9 - a^2})^N (x + \sqrt{9 - a^2})^P (a - 3)^P (a + 3)_P .$$

soit

$$x_1 = \sqrt{9 - a^2},\ x_2 = -\sqrt{9 - a^2},\ a_1 = 3,\ a_2 = -3.$$

Les limites sont

$$(x_1 > x > x_2)\ (a_1 > a > a_2)$$

4. Les symboles $(A^B)'$ et A^{-B} sont synonymes; chacun représente la négation de A^B et affirme que A ne se trouve pas dans la série B_1, B_2, B_3, etc. Supposons que A^B affirme que « *Albert* ira à *Bordeaux* », c'est-à-dire que Albert est une des personnes B_1, B_2, etc., qui iront à Bordeaux. Alors, $(A^B)'$, ou son synonyme A^{-B}, nie A^B et affirme que « *Albert* n'ira *pas* à *Bordeaux* ».

5. Dans les exemples précédents, le sujet A d'une proposition A^B était un être concret. Dans la logique *pure* ou *abstraite*, le sujet d'une proposition A^B est lui-même une proposition, et l'exposant B affirme quelque attribut, tel que *vrai*, *faux*, *certain*, etc. Les cinq mots *vrai*, *faux*, *certain*, *impossible*, *variable* (possible mais incertain), se présentent si souvent que je les représente d'une manière permanente respectivement par les cinq lettres grecques τ, ι, ε, η, θ. Par exemple, $A^{\tau}B^{\iota}C^{\varepsilon}D_{\eta}E^{\theta}$ affirme que A est *vrai*, B *faux*, C *certain*, D *impossible*, E *variable*.

6. La proposition A^{τ} (A est *vrai*) ne doit pas être confondue avec A^{ε} (A est *certain*), ni A^{ι} (A est *faux*) avec A^{η} (A est *impossible*). Le symbole A^{τ} affirme que A est vrai, *au moins dans le cas considéré;* A^{ε} affirme non seulement que A est vrai dans le cas considéré mais aussi que A est *certain*, c'est-à-dire vrai dans *toutes les circonstances compatibles avec nos données et nos définitions*. Pareillement, le symbole A^{ι} affirme que A est faux *au moins dans le cas considéré*; tandis que A^{η} affirme non seu-

lement que A est faux dans le cas considéré mais aussi que A *contredit quelque donnée ou définition* et qu'il est par conséquent *impossible*. Dans le langage des probabilités, A^ε affirme que la probabilité de A est 1; A^η affirme que la probabilité de A est 0; et A^θ affirme que la probabilité de A est quelque fraction au-dessous de 1 et au-dessus de 0. Donc A^θ nie A^ε et nie A^η de sorte que nous avons $A^\theta = A^{-\varepsilon} A^{-\eta}$ (voir §§ 4 et 23 avec la note à la fin).

7. Le symbole $\alpha : \beta$ (qui s'appelle une *implication*) représente la proposition $(\alpha\beta')^\eta$, ou son synonyme $(\alpha' + \beta)^\varepsilon$. Pour en rendre claire la signification, supposons que α représente la proposition A^B, et que β représente la proposition C^D. Alors $\alpha : \beta$ exprime les quatre affirmations suivantes, qui seront considérées ici comme équivalentes; (1) il affirme que A^B *implique* C^D; (2) il affirme que *si* A *est* B (c'est-à-dire appartient à la *classe* B), *alors* C *est* D; (3) il affirme que A *ne peut pas être* B *sans que* C *soit* D; (4) il affirme qu'*il est certain que ou* A *n'est pas* B, *ou* C *est* D.

8. Le symbole A^{xy} veut dire $(A^x)^y$; le symbole A^{xyz} veut dire $(A^{xy})^z$; et ainsi de suite. Par exemple, $A^{\varepsilon\iota}$ veut dire $(A^\varepsilon)^\iota$; il affirme qu'*il est faux que* A *soit certain*; tandis que $A^{\iota\varepsilon}$ veut dire $(A^\iota)^\varepsilon$; il affirme qu'*il est certain que* A *est faux*. Si nous considérons le symbole $(\alpha = \beta)$ comme l'équivalent de $(\alpha : \beta)$ $(\beta : \alpha)$, nous aurons $A^{\varepsilon\iota} = A^\eta$, $A^{\iota\eta} = A^\varepsilon$, $A^{\varepsilon\iota} = A^\eta + A^\theta$, $A^{\eta\iota} = A^\varepsilon + A^\theta$ (voir § 10).

9. La définition du symbole $\alpha : \beta$ (voir § 7) nous conduit au paradoxe $(\eta : \alpha)^\varepsilon$ $(\alpha : \varepsilon)^\varepsilon$, lequel affirme que les deux implications $\eta : \alpha$ et $\alpha : \varepsilon$ sont toujours vraies, quelle que soit la proposition α. Cependant, la preuve en est facile, car

$$\eta : \alpha = (\eta\alpha')^\eta = \eta^\eta = \varepsilon$$
$$\alpha : \varepsilon = (\alpha\varepsilon')^\eta = (\alpha\eta)^\eta = \eta^\eta = \varepsilon.$$

La formule $(\varepsilon')^\eta$, que nous supposons ici, n'a pas besoin de preuve. Par exemple, la négation de la certitude $(2 \times 3 = 6)$, à savoir : $(2 \times 3 \neq 6)$, est évidemment une impossibilité. Nous avons aussi les formules $(\eta')^\varepsilon$ et $(\theta')^\theta$. Pour donner un exemple concret de la dernière, supposons que la probabilité de la variable θ soit *deux tiers*; la probabilité de sa négation θ' est nécessairement *un tiers*, de sorte que θ' est aussi une variable.

10. Le symbole $(\alpha = \beta)$ est l'équivalent de $(\alpha : \beta)(\beta : \alpha)$. Il n'affirme nécessairement pas que les deux propositions α et β sont synonymes, en ce sens qu'elles auraient la même signification. Une identité absolue est affirmée, non par le symbole $(\alpha = \beta)$, mais par le symbole $(\alpha \equiv \beta)$; de sorte que nous avons toujours $(\alpha \equiv \beta) : (\alpha = \beta)$, mais non pas nécessairement $(\alpha = \beta) : (\alpha \equiv \beta)$. Néanmoins, l'affirmation $(\alpha = \beta)$ étant en général suffisante pour notre raisonnement, nous l'employons souvent dans des cas où nous pourrions employer $(\alpha \equiv \beta)$, comme nous employons quelquefois $\alpha : \beta$ au lieu de $(\alpha = \beta)$ quand nous n'avons pas besoin du second facteur $\beta : \alpha$. Il résulte de notre définition d'une implication (§ 7) que nous avons toujours les formules $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2)^\varepsilon$ et $(\eta_1 = \eta_2)^\varepsilon$, même lorsque la certitude ε_1 est différente de la certitude ε_2, et l'impossibilité η_1 différente de l'impossibilité η_2. Mais quand nous avons deux variables θ_1 et θ_2, l'équivalence $(\theta_1 = \theta_2)$ n'est pas nécessairement vraie.

11. Les propositions A^τ et A sont équivalentes, en ce sens que *chacune implique l'autre* (voir § 7); mais elles ne sont pas synonymes, en ce sens que chacune pourrait être *substituée* à l'autre dans n'importe quelle expression sans en changer la signification. Par exemple, supposons que A représente θ_τ, c'est-à-dire une variable *qui est vraie dans le cas considéré* quoi qu'elle ne soit pas toujours vraie. Nous aurons

$$(A^\tau)^\varepsilon = (\theta_\tau^\tau)^\varepsilon = \varepsilon^\varepsilon = \varepsilon; \text{ mais } A^\varepsilon = \theta_\tau^\varepsilon = \eta;$$

car, dans le premier cas, la proposition θ_τ^τ, qui affirme qu'une *variable vraie est vraie*, est une vérité évidente, et, par conséquent, une proposition de la classe ε; et dans le second cas, θ_τ^ε est une impossibilité, puisque *toute variable*, qu'elle soit une variable θ_ε ou une variable θ_ι, est exclue (par définition) de la classe ε. Pareillement, quoique nous ayons l'équivalente $(A^\varepsilon = A')$, en ce sens que A^ε implique A' et que A' implique A^ε, on ne peut pas toujours substituer A^ε à A', ni A' à A^ε, sans changer le sens de l'expression où l'un ou l'autre se trouve.

Ces paradoxes ne se présentent pas dans le langage ordinaire. Par exemple, il n'est guère possible de trouver l'ombre d'une différence de sens entre « il est *Américain* » et « il est vrai qu'il est Américain », ou entre « il n'est pas Américain » et « il est faux qu'il soit Américain ».

Mais la logique symbolique fait pour la raison ce que fait le télescope ou le microscope pour l'œil nu.

12. — Le symbole $\alpha ! \beta$ (qu'on peut appeler une *implication inverse*) affirme que la proposition α est impliquée par la proposition β. Il est donc synonyme de $\beta : \alpha$. Le symbole $\alpha : \beta : \gamma$ veut dire $(\alpha : \beta)\,(\beta : \gamma)$; et le symbole $\alpha ! \beta ! \gamma$ veut dire $(\alpha ! \beta)\,(\beta ! \gamma)$. On définit de même $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, qu'on peut appeler une *chaîne déductive*, et $\alpha ! \beta ! \gamma ! \delta$, qu'on peut appeler une *chaîne inductive*.

13. — Un des principes sur lesquels est fondé mon système est le principe que l'on peut changer le sens de n'importe quel symbole, ou de n'importe quel arrangement de symboles, pour aider ou abréger notre raisonnement, pourvu que ce changement de sens soit accompagné d'une nouvelle définition. N'est-ce pas cette variabilité de signification qui distingue l'algèbre de l'arithmétique ?

En arithmétique le même symbole $\left(\text{par exemple } 3 \text{ ou } \frac{2}{5}\right)$ indique toujours le même nombre ou fraction ; tandis qu'en algèbre le même symbole (par exemple x) peut représenter un nombre 6 dans un problème, 8 dans un autre, $5 + \frac{2}{3}$ dans un autre, et ainsi de suite. En suivant ce principe, nous allons maintenant changer la signification du symbole A_B, qui sera employé à l'avenir (jusqu'à nouvelle définition) comme synonyme de l'implication $A : B$. La négative de A_B sera représentée par A_{OB}, ou par $(A_B)'$, de sorte que nous avons

$$A_B = A : B = (AB')^{\eta} = (A' + B)^{\varepsilon}$$
$$A_{OB} = (A_B)' = (A : B)' = (AB')^{-\eta}.$$

14. — Un symbole de la forme $F(x)$ ou $f(x)$ ou $\varphi(x)$, etc., s'appelle une *fonction de x*.

Il représente *une expression quelconque contenant le symbole x*.

Un symbole de la forme $F(x, y)$ ou $\varphi(x, y)$, etc., s'appelle *une fonction de x et de y.*

Il représente *une expression quelconque contenant les symboles x et y.* Pareillement, $F(x, y, z)$ s'appelle *une fonction de x, y, z* ; et ainsi de suite. Supposons que nous ayons une fonction $\varphi(x)$; alors des symboles tels que $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha + \beta)$, $\varphi(A_B)$ représentent respectivement ce que l'expression $\varphi(x)$ devient (1) lorsque α est substitué à x ; (2) lorsque $\alpha + \beta$ est substitué à x ; (3) lorsque A_B est substitué à x; *les autres mots, ou autres symboles, de l'expression restant les mêmes qu'auparavant.* Pareillement, si nous avons une expression quelconque indiquée par $\varphi(x, y, z)$, le symbole $\varphi(\alpha, \alpha\beta, \beta^\varepsilon)$ indiquera ce que $\varphi(x, y, z)$ devient lorsque α est substitué à x, $\alpha\beta$ à y, et β^ε à z. Les exemples concrets suivants aideront à faire comprendre ces définitions.

Soit α = artiste, β = buffle, γ = gorille ; et employons le symbole $\varphi(\alpha, \beta)$ pour représenter la proposition, l'*artiste* a tué le *buffle.* Alors le symbole $\varphi(\alpha,\gamma)$ affirmera que l'*artiste* a tué le *gorille ;* le symbole $\varphi(\beta, \alpha)$ affirmera que le *buffle* a tué l'*artiste* ; et $\varphi(\gamma,\beta)$ affirmera que la *gorille* a tué le *buffle.*

Si nous représentons la formule $A_x + B_x : (AB)_x$ par le symbole $\varphi(:)$; alors $\varphi(=)$ représentera $A_x + B_x = (AB)_x$. La formule $\varphi(:)$ est toujours vraie, quelles que soient les propositions A, B, x; mais la proposition $\varphi(=)$ n'est pas toujours vraie ; elle est fausse, par exemple, lorsque $A = \theta$, $B = \theta'$, $x = \eta$; car alors elle devient

$$\theta_\eta + (\theta')_\eta = (\theta\theta')_\eta.$$

ce qui est faux, car

$$\theta_\eta = \theta : \eta = (\theta\eta')^\eta = (\theta\varepsilon)^\eta = \theta^\eta = \eta,$$
$$(\theta')_\eta = \theta' : \eta = (\theta'\varepsilon)^\eta = (\theta')^\eta = \theta^\varepsilon = \eta, \text{ [car } (\alpha')^\eta = \alpha^\varepsilon]$$
$$(\theta\theta')_\eta = \eta_\eta = \eta : \eta = \varepsilon \text{ (voir § 9).}$$

Donc, dans ce cas la proposition $\varphi(=)$ devient $\eta + \eta = \eta : \eta$, ce qui est faux, car $\eta + \eta = \eta$, tandis que $\eta : \eta = \varepsilon$.

Le symbole $\varphi^\alpha(x)$ veut dire $\{\varphi(x)\}^\alpha$. Par exemple, φ^ε affirme que $\varphi(x)$ est une certitude.

15. — Pour empêcher une multiplicité inutile de parenthèses j'emploie le symbole $A :: B$ comme l'équivalent de $(A = B)$, mais

avec moins de portée. Par exemple $(A = B :: C)$ veut dire $\{A = (B :: C)\}$ et non pas $\{(A = B) :: C\}$, lequel peut être exprimé sans parenthèses par le symbole $A :: B = C$. Pour économiser les parenthèses nous posons la convention que $A :: B$ a la même portée que $A : B$, mais plus de portée que $A + B$. Par exemple, $A = B :: C : D + E$ affirme que A est équivalent à $B :: C : D + E$, et cette dernière expression veut dire $(B = C)\{C : (D + E)\}$, car $C : D + E$ veut dire $C : (D + E)$, et non pas $(C : D) + E$.

16. — Dans les formules suivantes (dont la plupart sont évidentes) le symbole A_B est employé comme synonyme de $A : B$; et le symbole A_{OB} veut dire $(A_B)'$; de sorte que nous avons

$$A_B = (A : B) = (AB')^\eta = (A' + B)^\varepsilon$$
$$A_{OB} = (A : B)' = (AB')^{-\eta} = (A' + B)^{-\varepsilon}.$$

(1) $(\alpha\alpha')^\eta\ (\alpha + \alpha')^\varepsilon$; (2) $\alpha = \alpha\alpha = \alpha + \alpha$; (3) $(\alpha^\varepsilon + \alpha^\eta + \alpha^\theta)^\varepsilon$;
(4) $\alpha :: \beta = (\alpha : \beta)(\beta : \alpha)$; (5) $\alpha : \beta = \beta' : \alpha'$; (6) $\alpha^\tau : \beta^\tau = \beta^\iota : \alpha^\iota$;
(7) $(\alpha : \beta) : \alpha' + \beta$; (8) $(\alpha^\tau : \beta^\tau) : \alpha^\iota + \beta^\tau$; (9) $\alpha(\beta + \gamma) = \pi\gamma + \beta\gamma$:
(10) $(\alpha\beta)' = \alpha' + \beta'$; (11) $(\alpha + \beta)' = \alpha'\beta'$; (12) $(x : \alpha)(x : \beta) = x : \alpha\beta$;
(13) $\alpha_\beta\beta_\gamma : \alpha_\gamma$; (14) $(\alpha : \beta : \gamma) : (\alpha : \gamma)$; (15) $(\alpha + \beta)_{0x} = \alpha_{0x} + \beta_{0x}$:
(16) $\alpha : \alpha + \beta : \alpha + \beta + \gamma$; (17) $\alpha \,!\, \alpha\beta \,!\, \alpha\beta\gamma$; (18) $(\varepsilon')^\eta\ (\eta')^\varepsilon\ (\theta')^\theta$:
(19) $(\alpha + \beta)_x = \alpha_x\beta_x$; (20) $(\alpha + \beta)_x : \alpha_x + \beta_x : (\alpha\beta)_x$;
(21) $x_{\alpha\beta} : x_\alpha + x_\beta : x_{\alpha + \beta}$; (22) $\varepsilon : \alpha = \alpha^\varepsilon$; (23) $\alpha : \eta = \alpha^\eta$;
(24) $(\alpha : \beta) : (x_\alpha : x_\beta)$; (25) $(\alpha : \beta) : (\beta_x : \alpha_x)$; (26) $\alpha_\beta = \alpha :: \alpha\beta$;
(27) $\alpha_\beta = \alpha + \beta :: \beta$; (28) $(\alpha : \beta) : (\alpha^\varepsilon : \beta^\varepsilon)$; (29) $(\alpha : \beta_\gamma) : (\alpha\beta)_\gamma$.

17. — Nous allons maintenant examiner les syllogismes de la logique traditionnelle. Tout syllogisme valide n'est qu'un cas spécial de la formule générale $\alpha_\beta\beta_\gamma : \alpha_\gamma$, qui est l'abrégé de $(\alpha : \beta)(\beta : \gamma) : (\alpha : \gamma)$, et qui affirme que si α implique β, et β implique γ, alors α implique γ. (Voir §§ μ, 13). Dans cette formule les propositions α, β, γ peuvent avoir ou ne pas avoir le même sujet, et elles peuvent être, séparément ou en combinaison, des certitudes, des impossibilités, ou des variables.

Pour appliquer la formule aux syllogismes, nous supposons que les propositions α, β, γ ont toutes le même sujet, savoir, un individu P pris au hasard dans notre univers d'entités admissibles, P_1, P_2, P_3, etc. Ainsi les propositions α, β, γ sont les abrégés respectifs des propositions P^α, P^β, P^γ, qui affirment respectivement que P appartient à la classe α, que P appartient à la classe β, que P appartient à la classe γ. Comme dans les formules du § 16, le symbole $\alpha_{0\beta}$ est synonyme de $(\alpha_\beta)'$ et de $(\alpha : \beta)'$. Ainsi nous aurons

$$\alpha_\beta = \alpha : \beta = P\alpha : P\beta = \text{tout } \alpha \text{ est } \beta\,;$$
$$\alpha_{0\beta} = (\alpha : \beta)' = (P\alpha : P\beta)' = \text{quelque } \alpha \text{ n'est pas } \beta\,;$$
$$\alpha_{\beta'} = \alpha : \beta' = P\alpha : P{-}\beta = \text{nul } \alpha \text{ n'est } \beta\,;$$
$$\alpha_{0\beta'} = (\alpha : \beta')' = (P\alpha : P{-}\beta)' = \text{quelque } \alpha \text{ est } \beta.$$

Que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ représente la formule générale $\alpha_\beta \beta_\gamma : \alpha_\gamma$.

Alors si nous considérons comme équivalents les syllogismes qui ont des prémisses équivalentes et la même conclusion, ou des conclusions équivalentes, nous aurons

Barbara $= \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$
Celarent $=$ Cesare $= \varphi(\alpha, \beta, \gamma')$
Darii $=$ Datisi $= \varphi(\beta, \gamma, \alpha')$
Ferio $=$ Festino $=$ Ferison $=$ Frésison $= \varphi(\alpha, \gamma, \beta')$
Camestres $=$ Camenes $= \varphi(\gamma, \beta, \alpha')$
Disamis $=$ Dismaris $= \varphi(\beta, \alpha, \gamma')$
Baroko $= \varphi(\alpha, \gamma, \beta)$
Bokardo $= \varphi(\beta, \alpha, \gamma)$.

De la formule $x : y = y' : x'$ il s'ensuit que pour chacun de ces syllogismes $\varphi(x, y, z) = \varphi(z', y', x')$.

Nous pouvons donc renverser l'ordre des termes de chaque syllogisme, si, en même temps, nous en changeons les signes. Par exemple, *Camestres* et *Camenes* équivalent chacun à $\varphi(\alpha, \beta', \gamma')$.

18. — Il y a quatre syllogismes de la logique traditionnelle qui ne sont pas valides, du moins sous les formes qu'on leur donne en général.

Ce sont *Darapti, Felapton*, *Fesapo* et *Bramantip*.

Pour les rendre valides il faut donner aux trois premiers une troisième prémisse $\beta^{-\eta}$ (voir § 4), et à *Bramantip* une troisième prémisse $\gamma^{-\eta}$.

Ainsi corrigés, ils deviennent, comme tous les autres, des cas spéciaux de la formule générale $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$. En employant les symboles $(\text{Darapti})_c$, $(\text{Felapton})_c$, etc., pour indiquer les syllogismes *corrigés*, nous aurons

$(\text{Darapti})_c = \varphi(\beta, \alpha\gamma, \eta)$
$(\text{Felapton})_c = (\text{Fesapo})_c = \varphi(\beta, \alpha\gamma', \eta)$
$(\text{Bramantip})_c = \varphi(\gamma, \beta\alpha', \eta)$.

Pour montrer la méthode générale de réduction, il suffit de prendre deux cas (1) celui de Darii et (2) celui de $(\text{Darapti})_c$.

$$\begin{aligned}\text{Darii} &= \beta_\gamma \alpha_{o\beta'} : \alpha_{o\gamma'} = \beta_\gamma \alpha_{o\beta'} \alpha_{\gamma'} : \eta \ (\text{car } x : y' = x_y : \eta) \\ &= \beta_\gamma \alpha_{\gamma'} : \alpha_{\beta'} = \beta_\gamma \gamma_{\alpha'} : \beta_{\alpha'} = \varphi(\beta, \gamma, \alpha') \\ (\text{Darapti})_c &= \beta_\gamma \beta_\alpha \beta_{-\eta} : \alpha_{o\gamma'} = \beta_\gamma \beta_\alpha \beta_{o\eta} : \alpha_{o\gamma'} \\ &= \beta_\gamma \beta_\alpha \beta_{o\eta} \alpha_{\gamma'} : \eta = \beta_\gamma \beta_\alpha \alpha_{\gamma'} : \beta_\eta \\ &= \beta_{\gamma\alpha} \alpha_{\gamma'} : \beta_\eta = \beta_{\gamma\alpha} (\alpha\gamma)^\eta : \beta^\eta \\ &= \beta_{\gamma\alpha} (\gamma\alpha)_\eta : \beta_\eta = \varphi(\beta, \gamma\alpha, \eta).\end{aligned}$$

Pour prouver que *Darapti* sous sa forme ordinaire n'est pas nécessairement valide, nous n'avons qu'à montrer un seul cas où il est faux. Un tel cas est $\beta^\eta(\alpha\gamma)^\eta$, qui est le produit de deux facteurs parfaitement possibles et compatibles entre eux. En représentant *Darapti* sous sa forme ordinaire *non corrigée* par le symbole $(\textit{Darapti})_{-c}$, et en supposant que $\beta^\eta(\alpha\gamma)^\eta$, ou son synonyme $\beta_\eta(\alpha\gamma)^\eta$, soit vrai, nous aurons

$$\begin{aligned}(\text{Darapti})_{-c} &= \beta_\gamma \beta_\alpha : \alpha_{o\gamma'} = \beta_{\gamma\alpha} : (\alpha\gamma)_{o\eta} = \eta_\eta : \eta_{o\eta} \\ &= \varepsilon\, \eta = \eta\,;\end{aligned}$$

car

$$\eta_\eta = \eta : \eta = (\eta\eta')^\eta = (\eta\varepsilon)^\eta = \varepsilon,$$

et

$$\eta_{o\eta} = (\eta_\eta)' = \varepsilon' = \eta.$$

Pareillement, on peut prouver que *Felapton*, *Fesapo*, *Bramantip* ne sont pas nécessairement valides sous leurs formes ordinaires. Par contre, la formule générale $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ dont on peut déduire tout syllogisme valide est (comme toutes les formules valides) une *certitude formelle*, et par conséquent vraie pour *toutes* les valeurs de α, β, γ, ou de leurs combinaisons. Prenons, par exemple, le cas $\alpha^\varepsilon\beta^\theta\gamma^\eta$. Nous aurons

$$\varphi(\varepsilon, \theta, \eta) = \varepsilon_\theta \theta_\eta : \varepsilon_\eta = \eta\eta : \eta = \eta : \eta = \varepsilon\,;$$

car

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon\theta')^\eta = (\theta')^\eta = \theta^\varepsilon = \eta\ ;\ \text{et}\ \theta_\eta = (\theta\eta')^\eta = (\theta\varepsilon)^\eta = \theta^\eta = \eta\,;$$

et

$$\eta : \eta = \varepsilon \ (\text{voir § 9}).$$

19. La manière ordinaire d'exprimer un syllogisme ne me semble pas tout à fait correcte. Au lieu de dire, comme l'on fait en général, « Tout A est B, tout B est C, *donc* tout A est C »,

nous devrions dire « *Si* tout A est B, et si tout B est C, *alors* tout A est C ». Bien que les logiciens emploient presque toujours la première forme, c'est la seconde qui exprime leur vraie pensée. Sous la seconde forme, le syllogisme, comme je viens de le montrer, est toujours vrai indépendamment de la vérité ou de la fausseté de ses prémisses ou de sa conclusion ; car (en contraste avec la première forme) la seconde forme ne garantit ni la vérité des prémisses, ni la vérité de la conclusion ; elle affirme seulement qu'il est impossible que les prémisses soient vraies et (en même temps) la conclusion fausse (voir § 7). Soit P les deux prémisses, et Q la conclusion. La première forme affirme $P \therefore B$, qui équivaut à $P\,(P : Q)$; la seconde n'affirme que le second facteur $P : Q$, qui veut dire $(PQ')^{\eta}$ et qui est une certitude formelle. La forme $P \therefore Q$ est fausse dans le cas P^{η}, quelle que soit la conclusion Q ; tandis que la forme $P : Q$ est vraie dans ce cas comme dans tous les autres. Car en supposant $P = \eta$, nous aurons

$$P \therefore Q = P\,(P : Q) = \eta\,(\eta : Q) = \eta\varepsilon = \eta ;$$
$$P ; Q = \eta : Q = \varepsilon \text{ (voir § 9)}.$$

20. Le symbole $\frac{A}{B}$ indique *la probabilité que la proposition* A *soit vraie en supposant que* B *soit vrai ;* B étant une proposition quelconque compatible avec les données de notre problème, mais non nécessairement impliquée par elles.

Le symbole $\frac{A}{\varepsilon}$ indique *la probabilité que la proposition* A *soit vraie en ne supposant rien que les données du problème*. Le symbole $\delta \frac{A}{B}$, ou son synonyme $\delta\,(A, B)$, représente $\frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon}$, et s'appelle la *dépendance de* A *par rapport à* B. Il indique l'augmentation ou (lorsqu'il est négatif) la diminution subie par la probabilité générale $\frac{A}{\varepsilon}$ quand la supposition B est ajoutée à nos données. Le symbole $\delta^0 \frac{A}{B}$, ou son synonyme $\delta^0\,(A, B)$ affirme que la dépendance de A par rapport à B est *zéro*. Dans ce cas on dit que la proposition A *est indépendante de* B, ce qui implique (voir 20, formule 1) que B est indépendante de A. Les symboles a, b, c, etc. représentent respectivement les probabilités $\frac{A}{\varepsilon}$, $\frac{B}{\varepsilon}$, $\frac{C}{\varepsilon}$, etc. ; et les symboles a', b', c', etc., représentent respectivement les probabilités $\frac{A'}{\varepsilon}$, $\frac{B'}{\varepsilon}$, $\frac{C'}{\varepsilon}$, etc. ; de sorte que nous avons $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$, etc.

Les diagrammes suivants expliquent les définitions adoptées.

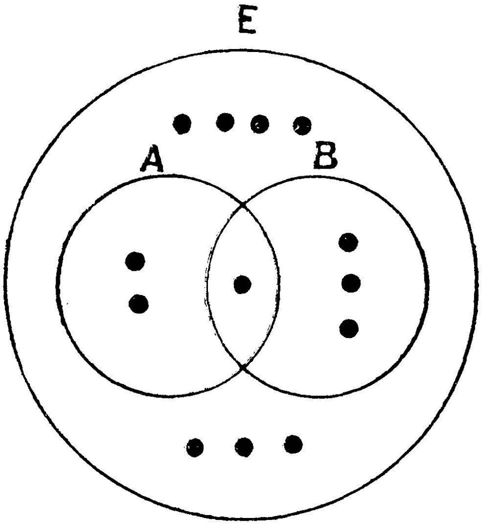

Fig. 1.

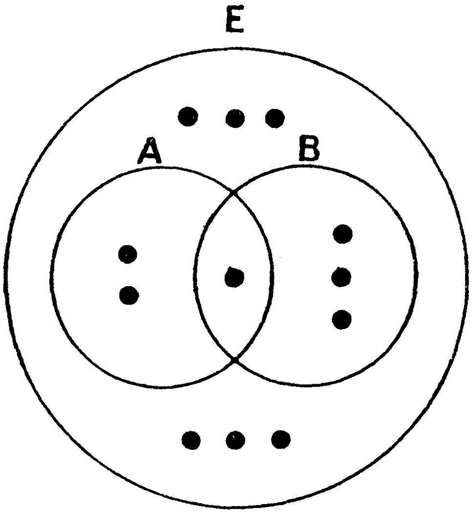

Fig. 2.

Que les symboles A, B affirment respectivement comme *propositions* qu'un point P (pris au hasard sur la totalité de points marqués dans le cercle E) sera dans le cercle A, qu'il sera dans le cercle B. Alors AB affirmera que P sera dans les deux cercles A et B ; AB′ affirmera que P sera dans le cercle A, mais pas dans le cercle B ; et pareillement pour A′B et A′B′. Dans la figure 1, nous avons $\frac{A}{\varepsilon} = a = \frac{3}{13}$; $\frac{A'}{\varepsilon} = a' = \frac{10}{13}$; $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{1}{13}$; $\frac{AB'}{\varepsilon} = \frac{2}{13}$. Dans la figure 2, nous avons $\frac{A}{\varepsilon} = a = \frac{3}{12}$; $\frac{A'}{\varepsilon} = a' = \frac{9}{12}$; $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{1}{12}$; $\frac{AB'}{\varepsilon} = \frac{2}{12}$. Dans la figure 3, nous avons $\frac{A}{\varepsilon} = a = \frac{3}{11}$; $\frac{A'}{\varepsilon} = a' = \frac{8}{11}$; $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{1}{11}$; $\frac{AB'}{\varepsilon} = \frac{2}{11}$.

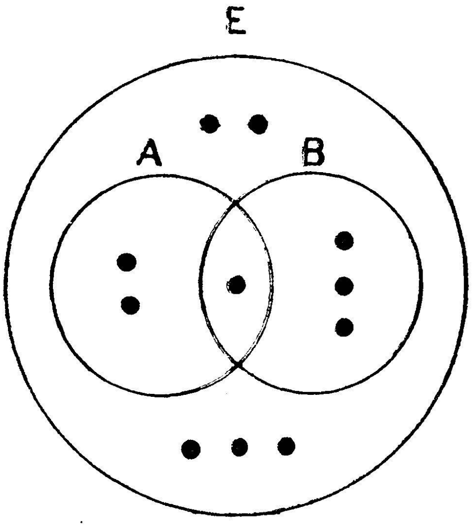

Fig. 3.

Il est évident aussi que :

(Fig. 1) $\quad \delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{4} - \frac{3}{13} = + \frac{1}{52}$

(Fig. 2) $\quad \delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{4} - \frac{3}{12} = 0$

(Fig. 3) $\delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{4} - \frac{3}{11} = - \frac{1}{44}$.

Pareillement, dans la figure 1, nous avons $\delta \frac{B}{A} = + \frac{1}{39}$; dans la figure 2, $\delta \frac{B}{A} = 0$; et dans la figure 3, $\delta \frac{B}{A} = - \frac{1}{33}$.

Les formules suivantes sont faciles à vérifier :

(1) $$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{B}{A} ; \qquad \delta \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \delta \frac{B}{A} ;$$

(2) $$\frac{A'}{B} = 1 - \frac{A}{B} ; \qquad \delta \frac{A'}{B} = - \delta \frac{A}{B} ;$$

(3) $$\frac{A}{B'} = \frac{a}{b'} - \frac{b}{b'} \cdot \frac{A}{B} ; \qquad \delta \frac{A}{B'} = - \frac{b}{b'} \delta \frac{A}{B} ;$$

(4) $$\frac{A'}{B'} = 1 - \frac{A}{B'} ; \qquad \delta \frac{A'}{B'} = - \delta \frac{A}{B'} = \frac{b}{b'} \delta \frac{A}{B} ;$$

(5) $$\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{\varepsilon} \cdot \frac{A}{B} = a \frac{B}{A} = b \frac{A}{B} ;$$

(6) $$\frac{A+B}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} + \frac{B}{\varepsilon} - \frac{AB}{\varepsilon} = a + b - a \frac{B}{A} = a + b - b \frac{A}{B} ;$$

(7) $$\frac{A+B}{x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x} - \frac{AB}{x} ;$$

(8) $$\frac{AB}{x} = \frac{A}{x} \cdot \frac{B}{xA} = \frac{B}{x} \cdot \frac{A}{xB} .$$

21. Quand un exposant x est une fraction comprise entre 0 et 1, les symboles A^x, $\left(\frac{A}{B}\right)^x$, $\delta^x \frac{A}{B}$ ou $\delta^x (A, B)$ affirment respectivement comme propositions que *la probabilité de* A *est* x ; que *la probabilité de* A, *en supposant* B, *est* x ; que *la dépendance de* A *par rapport à* B *est* x. Le contexte empêchera toute ambiguïté ou confusion d'idées quand nous employons ainsi des exposants comme prédicats. Ces conventions nous donnent les formules suivantes :

(1) $A^x B^y : \left(\frac{A}{B} = \frac{x}{y} \cdot \frac{B}{A}\right)$

(2) $A^x B^y (AB)^z : (A+B)^{x+y-z}$

(3) $A^x B^y (A+B)^z : (AB)^{x+y-z}$

(4) $A^a B^b (AB)^x (A+B)^y : (x+y=a+b)$

(5) $A^x B^y (AB)^{xy} : \delta^0 (A, B) : \delta^0 (B, A)$

(6) $A^x B^y \delta^0 (A, B) : (AB)^{xy}$

(7) $A^a B^b \left(\frac{A}{B}\right)^x \left(\frac{B}{A}\right)^y : \left(\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\right)$

(8) $$A^a B^b \left(\frac{A}{B}\right)^x \left(\frac{A}{B'}\right)^y : (bx + b'y = a)$$

(9) $$A^a B^b \left(\frac{A}{B}\right)^x \left(\frac{A'}{B'}\right)^y : (bx - b'y = a - b' = b - a')$$

(10) $$\left(\frac{A}{B}\right)^x : \left(\frac{A'}{B}\right)^{1-x}$$

(11) $$\left(\frac{A}{B} = \frac{B}{A}\right) : \left(\frac{A}{B}\right)^0 + (a = b) : (AB)^\eta + (a = b)$$

(12) $$\left(\frac{A}{B} = \frac{A}{B'}\right) : \delta^0 \frac{A}{B} : \delta^0 \frac{B}{A}$$

(13) $$\delta^0 (A, B) = \delta^0 (B, A) = \left(\frac{A}{B} = \frac{A}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{A}{B} = \frac{A}{B'}\right).$$

22. J'appelle une proposition une *certitude formelle* quand elle résulte nécessairement de nos définitions ou conventions de langage sans autres données; une *impossibilité formelle* quand elle contredit quelque définition ou convention de langage; et une *variable formelle* quand elle n'est ni formellement certaine ni formellement impossible. Une proposition est une *certitude matérielle* quand elle résulte nécessairement de quelques données spéciales extérieures à nos définitions ou conventions de langage; une *impossibilité matérielle* quand elle contredit quelques données spéciales extérieures à nos définitions ou conventions de langage. Les symboles A^ε, A^η affirment respectivement que A est une *certitude*, que A est une *impossibilité*, sans dire si la certitude ou impossibilité est formelle ou matérielle. Toutes les *formules* que j'ai données ici sont des certitudes formelles.

23. Quand une proposition n'est ni formellement certaine ni formellement impossible, elle peut être une *certitude matérielle*, une *impossibilité matérielle*, ou une *variable matérielle*, selon nos données. Ainsi nous pouvons avoir des propositions telles que $A^{\varepsilon\varepsilon}$ (il est certain que A est certain), $A^{\eta\theta}$ (il n'est ni certain ni impossible que A soit impossible), $A^{\varepsilon\theta\iota}$ (il est faux qu'il n'est ni certain ni impossible que A soit certain), et pareillement pour n'importe combien d'exposants ou prédicats successifs. Prenons les exemples concrets suivants :

En fixant notre attention sur une de ces trois figures, prenons comme donnée que le point P est pris au hasard sur les cinq points marqués dans le cercle E, et convenons que le symbole A (comme proposition) affirme que le point P, pris au hasard, sera un des points marqués dans le cercle A. Il est évident que si nous prenons la figure 1 nous aurons A^ε, tandis que dans la figure 2 nous aurons A^θ, et que dans la figure 3, nous aurons A^η. Car dans ces trois cas les probabilités respectives de A sont $1, \frac{2}{5}, 0$.

Mais maintenant, au lieu de prendre une figure *fixe*, prenons une des trois figures *au hasard*, et convenons que les symboles F_1, F_2, F_3 (comme *propositions*) affirment respectivement que

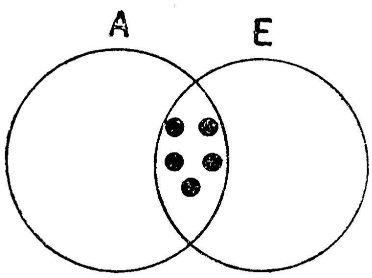

Fig. 1.

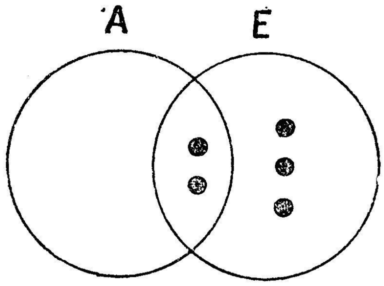

Fig. 2.

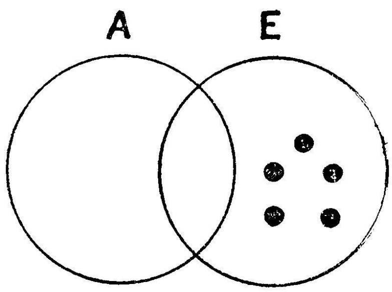

Fig. 3.

c'est la figure 1 qui se présentera, que c'est la figure 2, que c'est la figure 3. Puisque ces trois figures sont les seules de notre univers limité, nous avons $(F_1 + F_2 + F_3)^\varepsilon$, de sorte que

$$A^\varepsilon = A^\varepsilon (F_1 + F_2 + F_3) = A^\varepsilon F_1 + A^\varepsilon F_2 + A^\varepsilon F_3,$$

et, par conséquent (voir § 20, formule 5),

$$\frac{A^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{F_1}{\varepsilon} \cdot \frac{A^\varepsilon}{F_1} + \frac{F_2}{\varepsilon} \cdot \frac{A^\varepsilon}{F_2} + \frac{F_3}{\varepsilon} \cdot \frac{A^\varepsilon}{F_3} = \frac{1}{3}\left(\frac{A^\varepsilon}{F_1} + \frac{A^\varepsilon}{F_2} + \frac{A^\varepsilon}{F_3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, avec nos données actuelles, A^ε est *variable*, puisque sa probabilité n'est ni 1 ni 0, mais une fraction entre les deux. C'est-à-dire nos données nous mènent à la conclusion $A^{\varepsilon\theta}$. Pareillement on peut démontrer que nos données nous mènent aux conclusions $A^{\eta\theta}$ et $A^{\theta\theta}$. Mais maintenant supposons que les figures 2 et 3, au lieu d'être différentes de la figure 1, soient exactement semblables à la figure 1. Dans ce cas nous aurons

$$\frac{A^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{3}\left(\frac{A^\varepsilon}{F_1} + \frac{A^\varepsilon}{F_2} + \frac{A^\varepsilon}{F_3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{A^\varepsilon}{F_1} + \frac{A^\varepsilon}{F_1} + \frac{A^\varepsilon}{F_1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1.$$

Ainsi, au lieu d'avoir $A^{\varepsilon\theta}$, comme avant, nous aurons $A^{\varepsilon\varepsilon}$, qui affirme qu'*il est certain que* A *est certain*. Pareillement, avec ces données, nous aurons $A^{\eta\eta}$ et $A^{\theta\eta}$.

Note. — Le système de logique que je viens d'expliquer n'est pas fondé sur les mêmes principes que les systèmes des autres logiciens. Dans aucun des systèmes qui me sont connus je ne trouve la distinction que je fais entre les mots *vrai* et *certain*, et entre les mots *faux* et *impossible* ; de sorte que dans ces systèmes symboliques les propositions *variables* (dont les probabilités ne sont ni 1 ni 0) ne trouvent pas de place. Par conséquent, plusieurs des formules de ces systèmes n'ont qu'une validité limitée ; elles sont valides pour les certitudes et pour les impossibilités, mais non pour les variables. Mais, supposons qu'on reconnaisse ces variables, et qu'on désire les exprimer dans le langage symbolique ordinaire. Alors, la proposition exprimée par mon symbole A^{ε} serait exprimée par $(A = 1)$, ma proposition A^{η} par $(A = 0)$, et ma proposition A^{θ} par $(A \neq 1)\,(A \neq 0)$. Si l'on voulait exprimer ma proposition $A^{\theta\theta}$ (voir § 23) dans le langage symbolique ordinairement accepté, on serait obligé de la présenter sous la forme peu maniable de

$$\{(A \neq 1)\,(A \neq 0) \neq 1\}\,\{(A \neq 1)\,(A \neq 0) \neq 0\}.$$

Il y a dans mon système des formules innombrables, comme, par exemple,

$$A^{\varepsilon}B^{\theta} + B^{\varepsilon}A^{\theta} : (AB)^{\theta} : A^{-\eta}\,B^{\theta} + B^{-\eta}\,A^{\theta},$$

qui deviendraient presque incompréhensibles par leur simple longueur, si on les traduisait dans le langage symbolique d'un autre système. Si on représente la première alternative de cette dernière formule par $\varphi\,(\varepsilon)$, la dernière alternative doit être représentée par $\varphi\,(-\eta)$, et alors la formule devient

$$\varphi\,(\varepsilon) : (AB)^{\theta} : \varphi\,(-\eta).$$

(Pour l'explication des symboles $\varphi\,(\varepsilon)$ et $\varphi\,(-\eta)$, voir § 14). On trouvera des exemples de l'application de ma méthode aux mathématiques dans mon mémoire de la *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, t. III, p. 135-183, Librairie Armand Colin.

HUGH MAC COLL (Université de Londres).