SUR LA CONCEPTION DES LIMITES (1)

Autor(en): **Popovici, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6644

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LA CONCEPTION DES LIMITES [1]

Nous disons qu'une grandeur variable tend vers une limite, lorsqu'elle se rapproche infiniment d'une grandeur de même nature. On appelle cette dernière grandeur limite.

De cette définition, il résulte qu'il n'est pas nécessaire que la limite soit une grandeur fixe, et qu'elle-même peut avoir une limite. Il en résulte encore que la limite ne peut jamais être atteinte; en effet, la grandeur donnée se rapproche infiniment de sa limite; donc à l'infini, la grandeur arrivera à sa limite, mais l'infini ne s'épuise jamais, la limite ne sera jamais atteinte. Nous ne pouvons donc pas toujours dire sur la limite ce que nous pouvons dire en commun sur les grandeurs variables, et vice-versa.

Prenons un exemple. Considérons un cône et inscrivons-y une pyramide. Si nous faisons croître à l'infini le nombre de ses faces de telle façon que ces faces deviennent infiniment petites, la pyramide se rapprochera infiniment du cône. Obtiendrons-nous une pyramide qui se confonde avec le cône ? Non ; parce que nous n'obtiendrons jamais une pyramide ayant un nombre infini de faces. De plus encore, si notre imagination permettait d'exister à une telle pyramide elle ne pourrait être identifiée avec le cône, parce que la pyramide qui aurait un nombre infini de faces devrait être une figure variable, tandis que le cône est une figure fixe.

Par suite pouvons-nous dire du cône tout ce que nous pouvons dire de la pyramide ? Évidemment non. Il est possible que le cône jouisse de toutes les propriétés des pyramides, mais jusqu'ici nous ne sommes pas autorisés à l'admettre simplement parce

[1] Voir dans cette Revue, les articles de M. J.-F. BONNEL, notamment la Note intitulée : *Les limites et l'atome*, t. V, p. 332-338. LA RÉDACTION.

que le cône est la limite des pyramides. De plus, il nous faut encore remarquer que c'est tout autre chose que la limite géométrique, concrète, intuitive des figures de l'espace, et la limite arithmétique, abstraite, déductive des grandeurs qui représentent les mesures des éléments des figures de l'espace. Si la pyramide a comme limite le cône, il ne s'ensuit pas que la surface de la pyramide ait comme limite la surface du cône. Je montrerai qu'il existe des figures qui ont comme limite la surface du cône et malgré cela la surface latérale de ces figures n'est pas égale à la surface latérale du cône. Imaginons que nous plaçons dans un cône une série de disques qui se recouvrent en s'appuyant complètement sur la surface du cône. Supposons que ces disques s'amincissent infiniment, puis coupons par un plan l'ensemble formé par le cône et les disques, la figure formée par les disques aura comme limite la figure du cône ; mais la surface latérale de cette figure, ou en d'autres termes la surface découverte des disques, nous ne pouvons pas encore dire qu'elle a une limite égale à la surface du cône, nous ne pouvons pas affirmer non plus qu'elle ait une limite, cette limite dépend peut-être de l'inclinaison qu'ont les disques sur les génératrices du cône, et peut-être même de la loi que suivent ces disques en se faisant infiniment minces, parce qu'ils sont coupés obliquement par le plan. Considérons en particulier le cône circulaire droit, et les disques parallèles à la base du cône, soit r le rayon du cercle, i la hauteur et a la génératrice.

La surface non couverte des disques se compose de deux parties : la partie non couverte des bases et la surface latérale des disques. Considérons la première partie. En projetant chaque portion sur la base du cône, on voit que leur somme est égale à la base du cône : πr^2. Nous avons dit que la deuxième partie se compose de la surface latérale des disques. Chaque élément cylindrique $AA'cc'$ de cette surface se rapporte à l'élément correspondant de l'aire du tronc $AA'BB'$, comme les produits $\frac{2\pi . PA . AC}{2\pi . OI . AB}$ (OI étant la demi-somme des rayons du tronc) ; le rapport entre la surface latérale des disques et la surface latérale du tronc de cône sera compris entre la plus grande et la plus petite valeur du rapport $\frac{AP . AC}{OI . AB}$; lorsque les disques s'amincissent infiniment, ce rapport tend vers la valeur $\frac{AC}{AB} = \frac{i}{a}$ et la surface latérale des disques aura pour limite $\pi r a \frac{i}{a} = \pi r i$. La surface latérale de la figure qui tend vers le cône sera $\pi r i + \pi r^2 = \pi r (r + i)$ tandis que la surface latérale du cône est $\pi r a$ [1]. Conformément à notre calcul, nous pouvons voir que la surface que nous obtenons, si nous considérons les disques extérieurs a la même limite et que cette surface est indépendante de la loi d'après laquelle les disques s'amincissent. La corrélation entre l'espace et le nombre, entre la position et la dimension doit être conçue sous un rapport tout nouveau, nous devons donc concevoir d'une façon différente l'intuition et la déduction, ce que nous voyons et ce qui existe. Il nous faut séparer les opérations d'avec les nombres, les opérations d'avec les figures. Faire varier un nombre vers sa limite, c'est une opération ; faire varier une figure vers sa limite c'est encore une opération, mais nous avons vu que si deux figures tendent vers une même limite comme figures, il n'en est pas de même de leurs aires qui sont des nombres. Étudier une corrélation entre la variation des figures et la variation des fonctions serait une intéressante question. On pourra, par exemple, concevoir une nouvelle science différentielle et intégrale par des opérations purement géométriques ; différencier serait faire une sorte de déformation, intégrer, établir une sorte de mouvement. Beaucoup de théorèmes et de théories auront sans doute des corrélatifs très intéressants si nous passons du nombre à l'espace, si nous remplaçons le terme de valeur par celui de position, fonction par figure, égal par superposable, identité par coïncidence ; le seul

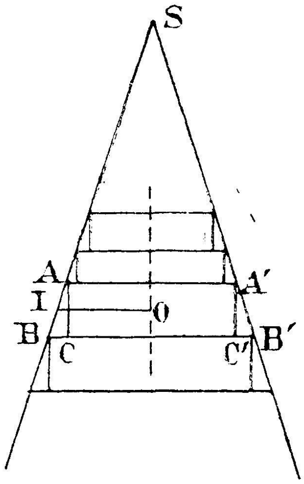

Fig. 1.

(1) On pourra calculer la somme des surfaces latérales des disques de cette façon :

Supposons les disques de hauteurs égales, et soit s le rayon du disque qui vient immédiatement après le sommet. Le n^{me} disque aura un rayon nse, nous cherchons la somme : $\Sigma 2\pi n s h = 2\pi s h \frac{n . n \mathrm{1} \alpha}{2}$. Or, $hn = i$ et $(n+i) s = r$. Donc, cette somme est πi.

terme équivalence reste de plus dans la richesse de la conception géométrique.

Il faut faire attention à la valeur des notions, distinguer la longueur et la ligne, l'aire et la surface et vice-versa. Ne dit-on pas ? Aire plane et surfaces coniques. Et relativement au volume ? Le volume est le lieu qu'occupe un corps dans l'espace. Si le corps se meut il n'a plus le même volume, parce qu'il n'occupe plus le même lieu dans l'espace. C'est là qu'est le défaut parce que nous n'avons qu'une seule notion pour la figure et pour la mesure.

Nous avons vu dans l'exemple cité plus haut qu'il est possible que la figure ait une limite et que son aire n'en ait pas. Prenons un exemple dans lequel l'aire a une limite sans que la figure en ait. Nous savons que chaque grandeur, qui croît en restant inférieure à une grandeur donnée, a une limite. Traduisons cela en géométrie.

Considérons une figure S et une surface intérieure Σ. Supposons que la partie intérieure Σ est variable et qu'elle croît en restant comprise dans la figure S, il est évident que son aire aura une limite inférieure à l'aire S; mais la figure Σ aura-t-elle une limite ? Elle en aura une, mais seulement lorsque : lim aire $\Sigma =$ aire S ; et si lim $\Sigma = S' < S$ alors nous pouvons imaginer dans l'intérieur de la figure S une infinité de figures d'aire S' et par suite la figure Σ n'admet pas de limite, tandis que son aire en a une. La proposition suivante : Chaque grandeur qui croît en restant inférieure à une grandeur donnée a une limite, se traduira ainsi en géométrie : Chaque figure qui croît en restant comprise dans une figure donnée a une limite. Nous voyons que le théorème n'est plus vrai pour les grandeurs géométriques.

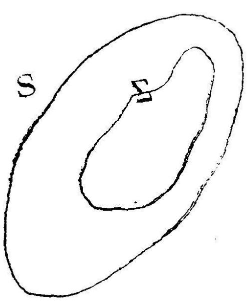

Fig. 2.

Nous allons en voir la cause. C'est peut-être parce que les figures en question ont deux dimensions tandis que l'aire n'en a qu'une. Remarquons alors qu'on peut imaginer dans une ligne AB une infinité des segments de même longueur. Donc c'est la position, la cause. Lorsque nous établissons une corrélation, il faut nous arrêter et établir une convention sur les notions. Que doit-on comprendre en géométrie par plus grand et plus petit ? Ceci : La figure A est plus petite que la figure B, lorsqu'elle est comprise dans la figure B, mais non lorsqu'elle peut y être comprise ; il en est du reste ainsi avec les nombres. N'est-il pas vrai que 2 est trois fois dans 6 ? Mais lorsqu'il s'agit de figures, c'est-à-dire des régions de l'espace, les figures sont des grandeurs qui ont dans leur nature constitutive l'espace, la position. Pouvons nous dire que la figure B contient la figure A, lorsqu'elle ne contient pas tous les points de A ? En algèbre on ne fait pas nécessairement distinction entre contenir et pouvoir contenir ; en géométrie pouvoir contenir est une question de forme et contenir une question de position, et alors nous dirons qu'une figure est plus grande qu'une autre lorsqu'elle la contient.

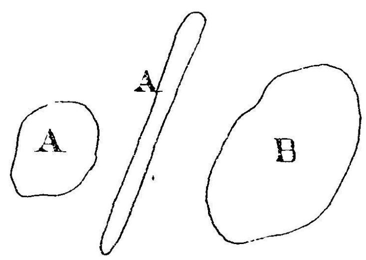

Fig. 3.

Demandons-nous maintenant ce que signifie pour une figure croître et décroître. Une figure croît lorsqu'elle gagne dans l'étendue sans rien perdre du terrain gagné s'il en est ainsi, il est aisé de démontrer notre théorème et par conséquent le théorème suivant : « Chaque grandeur, qui croît en restant inférieure à une grandeur donnée, à une limite » est générale. — Considérons maintenant une autre proposition : Un ensemble limité et contigu, qui contient une infinité de points, admet au moins un point limite. Le théorème est vrai que l'ensemble soit un intervalle numérique ou une figure.

Demandons-nous ce qui arrive lorsque au lieu de points, il s'agit de figures. Une figure qui contient une infinité de figures n'admet en général aucune figure limite. En effet, considérons une figure S qui contient une infinité de figures Σ, formées d'après une loi quelconque. Supposons qu'il existe un point O intérieur dans toutes ces figures. De ce point O, menons un rayon visuel OV, il sera intercepté par les figures Σ aux points α, a, $\dots\alpha_n$ et sur un intervalle fini et continu. Par suite les points α, a, $\dots\alpha_n$ admettront au moins un point limite a.

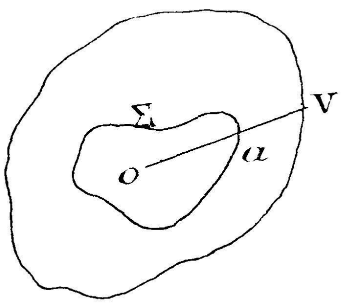

Fig. 4.

Si nous faisons tourner le rayon OV il sera intercepté de tous les points limites. Considérons l'ensemble formé par ces points ;

nous ne pouvons pas affirmer qu'il forme une courbe continue, et même s'il en était ainsi, nous ne pouvons dire que leur ensemble est une figure de la famille Σ, il pourrait être par exemple un de leurs enveloppes et par suite nous ne pouvons pas dire que l'infinité des figures Σ admet une figure limite.

Considérons maintenant que l'infinité des figures Σ est l'ensemble des figures que prend une figure variable. Que signifie une figure variable ? Une figure qui croît et décroît. Fixons les idées pour un moment; supposons que la figure croît seulement et si nous nous souvenons de la définition donnée sur la croissance et la décroissance, alors dans la direction d'un rayon visuel, les points α, a, ... seront dans le même ordre et admettront un point limite a qui sera de la dernière figure, par suite ils formeront un ensemble continu « la dernière figure » et parce que tous les points limites forment une figure de la famille considérée ; alors cette figure qui croît admet une figure limite. Nous avons affirmé plus haut qu'il était aisé de démontrer ce théorème, et nous l'avons démontré maintenant. Il en arrive de même lorsque la figure décroît, c'est-à-dire lorsqu'elle occupe successivement des positions comprises dans les précédentes. Mais qu'arrive-t-il lorsque nous ne précisons pas le sens de la variation d'une figure ? Par exemple, la figure A, avait crû et est devenue la figure B; puis après la figure B a décru et est devenue la figure C. Qu'a fait la figure A depuis A jusqu'à C ? Elle a varié. Mais a-t-elle crû ou décrû ? Conformément à la définition donnée elle n'a crû ni décrû, et malgré tout elle a varié, car si elle restait constante les figures A et C seraient identiques. Donc, par quelle sorte de variation passons-nous de A à C ? Ni croissant, ni décroissant seulement, mais croissant et décroissant à la fois. Nous sentons donc la nécessité d'envisager des grandeurs géométriques d'une variation d'une nature nouvelle, et c'est bien naturel, puisque les grandeurs géométriques ne sont pas de la même nature que celles arithmétiques, les premières contiennent dans leur constitution l'espace. Eh bien donc, dans quel cas pourrons-nous appliquer les vérités sur la variation des nombres à la variation

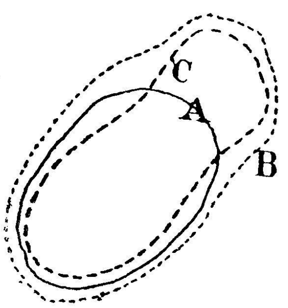

Fig. 5.

des figures ? Seulement lorsque les figures varient de telle façon que deux figures différentes puissent être comparées à deux nombres différents. C'est donc qu'il reste à chercher beaucoup de vérités propres sur la variation générale des figures différente de celle des nombres.

C. Popovici (Turno-Severin, Roumanie)

SUR

QUELQUES SOMMATIONS QUE L'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE

---

1. — Au nombre des notions fondamentales sur lesquelles repose la Mécanique rationnelle, se trouvent celles de *point matériel* et de *masse d'un point*. D'après les idées qui sont généralement adoptées aujourd'hui, la masse d'un point est un nombre (1). Si l'on considère un système de n points on appelle *masse du système* la somme des masses des n points : $M = \sum_1^n m_i$. Mais si l'on considère un système comprenant une infinité de points, comme c'est le cas général en Mécanique, la somme des masses de ces points contient une infinité de termes positifs, et l'on ne voit pas *à priori*, que l'on puisse attribuer un sens à une telle somme. Il est nécessaire d'introduire de nouvelles hypothèses. Des remarques analogues se rapportent aux expressions Σmx, $\Sigma m \frac{dx}{dt}$, $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$, $\Sigma m \left(y \frac{dx}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right)$, Σmv^2, Σmr^2, qui se rencontrent dans l'application des théorèmes fondamentaux de la Mécanique. Au point de vue de l'enseignement, il peut y avoir intérêt à préciser les hypothèses qui permettront d'introduire ces diverses sommes dans le calcul et, pour le cas des corps con-

---

(1) Voir Appell, *Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale*. Paris, 1901, — et Blondlot, *Notions de mécanique à l'usage des élèves de physique*, autographié, Nancy, 1896.