SUR QUELQUES SOMMATIONS QUE L'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE

Autor(en): **Dautheville, S.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6645

des figures ? Seulement lorsque les figures varient de telle façon que deux figures différentes puissent être comparées à deux nombres différents. C'est donc qu'il reste à chercher beaucoup de vérités propres sur la variation générale des figures différente de celle des nombres.

C. Popovici (Turno-Severin, Roumanie)

SUR

QUELQUES SOMMATIONS QUE L'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE

---

1. — Au nombre des notions fondamentales sur lesquelles repose la Mécanique rationnelle, se trouvent celles de *point matériel* et de *masse d'un point*. D'après les idées qui sont généralement adoptées aujourd'hui, la masse d'un point est un nombre [1]. Si l'on considère un système de n points on appelle *masse du système* la somme des masses des n points : $M = \sum_1^n m_i$. Mais si l'on considère un système comprenant une infinité de points, comme c'est le cas général en Mécanique, la somme des masses de ces points contient une infinité de termes positifs, et l'on ne voit pas *à priori*, que l'on puisse attribuer un sens à une telle somme. Il est nécessaire d'introduire de nouvelles hypothèses. Des remarques analogues se rapportent aux expressions Σmx, $\Sigma m \frac{dx}{dt}$, $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$, $\Sigma m \left(y \frac{dx}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right)$, Σmv^2, Σmr^2, qui se rencontrent dans l'application des théorèmes fondamentaux de la Mécanique. Au point de vue de l'enseignement, il peut y avoir intérêt à préciser les hypothèses qui permettront d'introduire ces diverses sommes dans le calcul et, pour le cas des corps con-

---

[1] Voir Appell, *Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale*. Paris, 1901, — et Blondlot, *Notions de mécanique à l'usage des élèves de physique*, autographié, Nancy, 1896.

tinus, de les exprimer par des intégrales définies. Nous tenterons de le faire en quelques lignes.

2. *Masse d'un corps ; centre de gravité.* — Considérons n points pesants, de poids respectifs $p_1, p_2, \ldots p_n$. Ces poids ne sont autre chose que des forces parallèles et de même sens ; ils ont une résultante égale à leur somme, $P = \Sigma p_i$, et appliquée en un point G_1. Pour passer au cas d'un corps, il faut faire croître n indéfiniment. L'expérience montre que l'on peut maintenir en équilibre un corps pesant en lui appliquant une seule force. Dès lors il est naturel d'admettre que Σp_i reste finie et a une limite lorsque n croît indéfiniment. Cette limite est le poids du corps, $P = \Sigma p_i$. Nous admettrons aussi que G_1 tend vers une position limite, G, point d'application du poids ; c'est le centre de gravité. Mais, en introduisant l'accélération due à la pesanteur, on a $p_i = gm_i$; par suite si Σp_i a une limite, il en est de même pour Σm_i. Posant $M = \Sigma m_i$, on appelle M *masse du corps*, et on a $P = Mg$.

Cela posé, comme la masse d'un point est indépendante de la force qui agit sur lui, la masse d'un corps, telle qu'on vient de la définir, est indépendante de la pesanteur.

On peut énoncer autrement l'hypothèse précédente. Pour que Σm_i reste finie et tende vers l'unité quand le nombre de ses termes croît indéfiniment, il faut que M_i tende vers o. Ce qui a été dit revient donc à admettre que la masse d'un point qui peut être un nombre positif quelconque quand le point est isolé, doit être considérée comme un nombre infiniment petit quand le point est envisagé comme faisant partie d'un corps, et même comme un infiniment petit assujetti à une condition, celle de la convergence de Σm_i.

3. *Expression de la masse par une intégrale définie.* — Nous considérerons seulement des corps continus. Prenons le cas d'un arc de courbe AB. Décomposons-le en n arcs ; soit $MM' = \Delta s$ l'une des parties, et s la valeur de l'arc de courbe terminé en M. Appelons Δm la masse de l'arc MM', arc que nous considérons comme formé par l'ensemble d'une infinité de points matériels. Le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ est une fonction de s.

Nous ne considérerons que le cas où ce quotient tend vers une limite, μ, quand Δs tend vers o ; μ étant une fonction de s qui est elle-même continue. Cette restriction n'a guère d'importance, car il ne semble pas pour le moment qu'il y ait utilité d'introduire en mécanique des fonctions discontinues ou n'admettant pas de dérivée, μ est la densité de la courbe en M. Cela posé, on a $\Delta m = (\mu + \varepsilon_1)\Delta s$, ε désignant (comme dans la suite) un infiniment petit dont l'ordre par rapport à Δs est égal à l'indice ; ou bien $\Delta m = \mu.\ \Delta s + \varepsilon_2$. On a donc pour la masse de l'arc AB :

$$M = \Sigma\,(\mu\Delta s + \varepsilon_2). \tag{1}$$

Faisons croître indéfiniment le nombre des arcs MM′, chacun d'eux tendant vers o d'une manière quelconque. Le second membre de (1), reste égal à M, il tend donc vers une limite. D'après les propriétés des infiniment petits, il en est de même pour $\Sigma\mu.\Delta s$. Alors, par la définition même de l'intégrale définie, on a

$$M = \int_A^B \mu.\,ds. \tag{2}$$

Si au lieu de considérer un arc de courbe, on envisage une aire ou un volume, la marche du raisonnement ne sera pas modifiée, mais on remplacera Δs par $\Delta\sigma$ ou $\Delta\nu$, et on arrivera à une intégrale double ou triple.

Lorsque Δs tend vers σ, l'arc MM′ tend vers M. Ainsi la masse de M est un infiniment petit, ce qu'on sait déjà, dont la partie principale est $\mu.ds$.

4. *Formules pour le centre de gravité.* — Considérons encore l'arc AB décomposé en n arcs. Appelant X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité ; x, y, z celles de M ; x, y, z, celles du centre de gravité de l'arc MM′, le théorème des moments donne :

$$MX = \Sigma\Delta m.\ x_1.$$

Mais le centre de gravité de MM′ tend vers M quand Δs tend vers σ. Donc

$$MX = \sum(\mu + \varepsilon_1)\ \Delta s.\ (x + \varepsilon_1) = \sum(\mu x\Delta s + \varepsilon_2).$$

Passant à la limite et raisonnant comme plus haut :

$$MX = \int_A^B \mu x . ds, \text{ etc.}$$

Nous démontrons, en même temps, que l'on peut introduire Σmx, la sommation étant étendue à tous les points du corps, et écrire

$$MX = \Sigma mx.$$

Il en résulte, par les mêmes hypothèses :

$$M \frac{dX}{dt} = \Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad M \frac{d^2\chi}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2\mu}{dt^2},$$

c'est-à-dire que les expressions $\Sigma m \frac{dx}{dt}$, $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$ ont un sens.

5. *Les autres sommes.* — Quelques mots suffisent pour justifier la considération des autres sommes. On a par exemple :

$$\Sigma m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{d\mu}\right) = \sum \left[\mu \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right) \Delta S + \varepsilon_2\right]$$

$$\Sigma m \rho^2 = \sum \left[\mu \rho^2 . \Delta s + \varepsilon_2\right]$$

$$\Sigma m r^2 = \sum \left[\mu r^2 . \Delta s + \varepsilon_2\right]$$

les valeurs de $y, \ldots, \frac{dy}{dt}, \ldots, \rho$ et r se rapportant au point M de densité μ. Nous convenons de ne considérer que des fonctions continues ; toutes les fonctions qui sont coefficients de Δs sont donc intégrables. Il en résulte que les sommations, étendues à tous les points du corps, ont un sens ; et en outre qu'elles s'expriment par des intégrales définies qui seront simples, doubles ou triples selon que l'on considérera un arc, une aire ou un volume.

S. Dautheville (Montpellier).