Chapitre V. — Discussion de la valeur des applications scientifiques du calcul des probabilités.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

LES

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A LA MÉTHODE SCIENTIFIQUE [1]

CHAPITRE V. — *Discussion de la valeur des applications scientifiques du calcul des probabilités.*

La théorie des moyennes. — La probabilité des causes. — La probabilité des erreurs. — Confusion de l'erreur et de l'écart. — On conclut à tort à des écarts objectifs de la matière observée. — Supposition illusoire de l'élimination des erreurs systématiques. — Il y a des probabilités qui ne sont pas toujours vérifiées; exemples. — Impuissance pratique de la théorie des probabilités des erreurs. — Causes efficientes et calcul des probabilités.— L'approximation; les conditions essentielles; exemples.— L'application de la probabilité des causes et l'application de la probabilité des erreurs.

Nous avons vu que les applications scientifiques, les applications pratiques aux méthodes d'observation et de recherche, étaient peu nombreuses, et que les applications exactes au point de vue mathématique étaient encore plus rares. Mais, même exactes, toutes ces applications sont-elles légitimes et jusqu'à quel point le sont-elles, c'est ce que nous allons examiner maintenant.

Les applications les plus fréquentes et les plus sérieuses sont celles qui se fondent sur la théorie des moyennes et recherchent la probabilité des erreurs.

Quelle est la valeur de ces applications ?

Voyons d'abord quelles en sont les bases. L'erreur est un écart qui se produit entre une valeur réelle et une valeur appréciée. Comme, le plus souvent, la valeur réelle n'est pas connue en elle-même, mais seulement par des valeurs appréciées, on ne

---

[1] Voir *L'Enseignement mathématique*, numéro précédent.

peut savoir de combien une valeur appréciée diffère d'une valeur réelle. Il faut donc un artifice qui permette d'effectuer des calculs sur cette erreur. Pour cela, on considère comme valeur réelle, c'est-à-dire comme valeur dont la réalité est la plus probable, une moyenne entre un certain nombre de valeurs appréciées. L'erreur est donc définie, pour le calcul des probabilités, l'écart par rapport à la moyenne. On détermine une erreur que l'on appelle probable, non sans postulats et approximations, et on compare toutes les erreurs à celle-là. Une nouvelle formule donne les probabilités des erreurs, sous ce rapport. Que peut-on conclure d'une probabilité plus ou moins faible, plus ou moins forte d'un écart relatif à la moyenne, d'une erreur déterminée ?

Nous voyons que l'on peut indifféremment en conclure l'une de ces assertions :

Ou bien il y a probabilité d'une cause perturbatrice, ou régulatrice de l'erreur, c'est-à-dire de la variation de la moyenne, probabilité dans tous les cas, d'une erreur systématique, distinguée ainsi de l'erreur fortuite à laquelle s'applique le calcul des probabilités. Là donc, une faible probabilité d'une erreur décèlerait l'existence d'une erreur systématique ayant échappé aux investigations préalables.

Ou bien la faible probabilité d'une erreur fera déclarer au contraire qu'on n'est plus en présence d'une erreur, mais d'un écart réel dû aux phénomènes observés, et non à la manière d'observer ces phénomènes. Ici on décèlerait un écart objectif s'opposant ainsi à l'écart subjectif qui tient aux conditions individuelles d'observation, et que l'on appelle erreur, l'erreur dont on cherche la probabilité.

Dans un cas, la faible probabilité d'une erreur indiquerait la présence d'une erreur plus considérable que les erreurs fortuites, dans l'autre cas l'absence d'erreur même fortuite à laquelle est substituée un écart réel.

On tire donc toujours des conclusions sur quelque chose d'objectif, devant dépasser la simple subjectivité, ou une erreur objective due aux méthodes ou aux instruments d'observation, ou un écart objectif résidant dans la matière même observée.

Or nous constatons qu'on conclut toujours à un écart objectif de la matière observée. Cela n'est donc pas légitime. On suppose toutes les erreurs systématiques éliminées, mais c'est une supposition qui n'est pas valable ; rien en effet ne permet de choisir entre ces deux conclusions possibles. Il n'y a qu'un cas où une interprétation est plus indiquée que l'autre ; c'est celui où l'on prend une série de mesures, d'évaluations d'une valeur que l'on croit rester identique pendant tout le temps que durent ces évaluations et ces mesures : la mesure anthropologique d'un crâne par exemple, toujours le même, mesure que l'on fait bien rarement car cela n'a pas grand intérêt scientifique. Et encore rien dans le calcul des probabilités ne permet d'affirmer l'identité dans le temps de la matière observée : on ignore en effet les causes possibles de variation. Et, dès qu'on fait une moyenne de crânes différents, comme il y a aussi des écarts objectifs, l'ambiguité reparaît.

Cette ambiguité reste constante dans la mesure des probabilités d'erreurs des temps de réaction, par exemple où rien ne reste identique à deux moments différents du temps.

Enfin signalons une confusion véritable que l'on fait parfois de l'erreur et de l'écart, comme Stieda et Goldstein par exemple. C'est ainsi qu'ils prétendent appliquer la théorie des probabilités des erreurs à la détermination des types, caractérisés par des écarts objectifs et réels, et par conséquent à la probabilité pour que ces écarts soient dus à des variations quasi-fortuites d'un type considéré comme un individu ou pour qu'ils soient dus à une différence de deux types, à l'existence d'un type différent et objectivement distinct, type cause de ces écarts faussement assimilés aux erreurs. La théorie des erreurs ne porte que sur des phénomènes objectifs et sur leurs oscillations, et ne peut sans un arbitraire inconcevable, être étendue à des oscillations de phénomènes objectifs, surtout avec cette notion souvent obscure et arbitraire aussi du type.

Toutes ces réserves étant faites, on peut voir quelle faible portée peut avoir l'application scientifique du calcul des probabilités des erreurs : elle se limiterait à la probabilité d'une erreur systématique dans une série d'évaluations, d'une grandeur supposée identique et constante dans le temps, ce qui n'est déjà qu'approximatif (1).

---

(1) Parfois l'erreur probable ne sert qu'à limiter le nombre des unités décimales d'une approximation, quelle que soit l'insuffisance théorique du calcul, on peut reconnaître que sa portée pratique n'est pas alors dangereuse.

Et enfin il y a lieu, même dans ses limites, de ne pas oublier que ce calcul repose sur des postulats qui ne sont pas toujours vérifiés : nous avons signalé le postulat de Gauss de la moyenne considérée comme la valeur la plus probable. Il y a deux autres postulats, l'un qui consiste à admettre que les erreurs fortuites, c'est-à-dire inconstantes, car c'est le seul terme d'opposition avec les erreurs systématiques, ne peuvent pas dépasser une certaine limite, et restent dans le voisinage de l'erreur probable, dont la mesure n'est peut-être pas très exacte, le second, que les erreurs tendent à se compenser mutuellement, sans s'ajouter dans un sens ni dans l'autre.

Nous avons dit que la mesure de l'erreur probable n'avait pas une certitude *a priori* bien grande. Or, en appliquant la théorie des moyennes, et, par extension du postulat de Gauss, en considérant la moyenne des erreurs, des variations (indépendamment de la moyenne générale) comme l'erreur probable, on constate *apriori* que cette mesure diffère très souvent et parfois d'une façon très considérable de l'erreur probable mesurée par la moyenne des écarts relatifs à la moyenne avec le coefficient du calcul.

M. Binet a été victime d'une absurdité due à son application, que nous avons relatée, du calcul de probabilité des erreurs :

Il a mesuré, et cela est très louable, son erreur moyenne de mesure, en faisant à des intervalles plus ou moins éloignées, des évaluations de la même mesure. Il a trouvé une erreur moyenne de $1^{mm}8$; en supposant que les variations se produisent également dans les deux sens par rapport à la moyenne, il faut en prendre la moitié, c'est-à-dire $0^{mm}9$. D'autre part il applique la formule de probabilité des erreurs dans l'écart des deux moyennes

$$\Theta(t), \quad t = \frac{n_1 \sqrt{ndv}}{n v_1^2 + n_1 v^2}.$$

Et il trouve une probabilité de 70 p. 100 pour que l'écart qu'il a trouvé entre la moyenne des mesures du diamètre frontal minimum soit un écart réel dû à la matière observée, et non aux conditions subjectives, fortuites d'observation.

Or quel est cet écart : $0^{mm}76$ (1).

(1) BINET p. 399. Diamètre frontal minimum. Intelligents : $103^{mm}20$.
Inintelligents : $102^{mm}34$.

Cet écart est donc inférieur à l'erreur moyenne observée ($0^{mm}9$). Cela suffit pour condamner les conclusions de M. Binet pour cette mesure, et la formule de calcul des probabilité des erreurs.

Il est étrange que M. Binet n'ait pas été frappé de cette absurdité évidente et qu'il ne l'ait pas signalée.

Aussi félicitons-nous vivement M. Bourdon qui, faisant appel aux probabilités dans une étude de psychologie, procéda par une recherche expérimentale de leur valeur au lieu de faire appel à des formules mathématiques du calcul.

Pour déterminer dans des recherches sur l'association, la probabilité pour que deux phénomènes consécutifs, pris au hasard, se ressemblent, il a ouvert des livres, et a considéré chaque fois le premier adjectif, substantif ou verbe qu'il rencontrait, sur la première ligne de la page de droite, et renouvelant un très grand nombre de fois ces expériences de consécution, il a dressé un tableau expérimental des ressemblances phonétiques, graphiques, ou syllabiques constatées, dont il a établi la proportion. Et il a pu comparer le tableau obtenu dans ses expériences sur l'association avec celui-là.

Si la théorie de la probabilité des erreurs est vraiment entachée d'une impuissance pratique, il en est de même des notions qu'on prétend en tirer, de précision et de poids. D'ailleurs la mesure du poids paraît assez livrée à l'arbitraire. Nous voyons un astronome, dans une thèse toute récente, après avoir donné une détermination des poids ajouter : « Toutefois, on ne peut accorder une confiance trop absolue aux nombres ainsi déterminés. Il est certain, en effet, que dans l'appréciation si délicate du poids, beaucoup de circonstances inconnues doivent échapper au calcul. D'ailleurs les différentes méthodes employées par les astronomes qui se sont occupés de la formation d'un catalogue montrent que cette détermination est toujours quelque peu livrée au sentiment de chacun. Nous avons donc suivi les coutumes habituelles en nous laissant, dans l'évaluation du poids, une certaine latitude [1]. »

Enfin nous ferons remarquer que les observations que nous

(1) Joanny LAGRULA. *Étude sur les occultations d'amas d'étoiles par la lune, avec un catalogue normal des Pléiades*. Lyon, Ruj, in-8, 1901, p. 50.

avons faites aux bases mathématiques de cette théorie et à ses postulats ont été présentées déjà par Bertrand. « La règle des moyennes, dit-il, il importe d'insister sur ce point, n'est ni démontrée, ni exacte [1].

D'ailleurs « l'application du calcul des probabilités à l'étude des erreurs d'observation repose sur une fiction dont il ne faudrait pas faire une réalité. Les erreurs sont supposées tirées au sort dans une urne dont la composition est définie par la loi de probabilité acceptée [2] ».

Ainsi la théorie de la probabilité des erreurs très sujette en elle-même à la critique, pleine de postulats et d'approximations rencontre dans l'application des difficultés insurmontables, et n'aboutit à aucune conclusion certaine. Partout on peut introduire de l'arbitraire, jusque dans le calcul, à plus forte raison dans sa pratique. Les conditions exigées sont irréalisables, l'élimination complète des erreurs systématiques n'étant jamais certaine. Il n'y a pas adéquation à la nature qui ne reste pas identique dans le temps. Et au terme on ne sait si les résultats doivent s'interpréter dans le sens d'une réalité objective des faits observés, ou d'une perturbation constante des méthodes et des instruments d'observation.

Mais, à côté de cette application du calcul de probabilités à la vérification scientifique en quelque sorte, il y a une application plus importante d'investigation et de recherche. Elle porte, non plus sur la question de l'existence d'un substrat réel de variations apparentes observées, mais d'une cause efficiente de phénomènes constatés.

A quelles conditions le calcul des probabilités sera-t-il ici applicable ?

Nous ne reviendrons pas sur la théorie mathématique en elle-même, ses approximations et ses postulats inévitables.

En la supposant exacte, qu'exige-t-elle pour conserver cette exactitude ?

Il y a deux conditions essentielles requises :

1° Un très grand nombre de cas ;

---

(1) Bertrand, p. 110.

(2) *id.*, p. 222.

2° L'égale possibilité des cas.

1° Il faut un très grand nombre de cas. Or que de fois l'on applique le calcul des probabilités à un cas isolé. Nous en avons montré un remarquable exemple. Les études de Mitchell sur la probabilité d'une cause qui aurait produit le rapprochement de deux étoiles dans le ciel portent aussi sur un cas isolé et sont donc entachées d'un vice radical.

Mais, dans cette loi des grands nombres, il y a une indétermination énorme. Tous les nombres sont à la fois petits et grands : je cherche la probabilité d'un événement; elle est très faible; et s'il se produit une fois dans une année, dans un mois, dans une semaine ; conclurai-je à l'existence d'une cause de cet événement? Je puis dire que cette semaine, ce mois, cette année sont des périodes trop limitées. Si j'ai une probabilité d'un milliardième, cela veut dire que, sur un milliard de cas analogues, l'événement considéré se produira une fois.

Je puis être tombé sur cette milliardième fois. Il faudra que je m'assure que sur un milliard de cas analogues, l'événement ne s'est produit qu'une fois; et encore cela pourra paraître insuffisant : dans un milliard de séries d'un milliard, l'événement doit arriver un milliard de fois; mais il y a des écarts d'autant plus grands en valeur absolue que les nombres de cas sont plus élevés. Je pourrai avoir plus d'un milliard d'événements; ils pourraient se trouver parfois réunis plus particulièrement en certaines séries, être plus particulièrement disposés dans d'autres.

Donc, dans ma série d'un milliard, je pourrai me trouver en présence d'une de ces séries anormales, et rencontrer plusieurs fois l'événement. Remonterai-je à un milliard de ces séries, le même raisonnement viendrait encore, où s'arrêter? Et les écarts croissant en valeur absolue à mesure, ils vont, eux aussi, se perdre dans l'infini, en sorte que la précision semble s'enfuir et s'éloigner de plus en plus à mesure qu'on croit l'atteindre, ou s'en approcher davantage.

En tout cas le calcul des probabilités exige un nombre de cas plus considérable la plupart du temps qu'il n'est possible au savant d'en observer : des vies seraient insuffisantes à des observations de ce genre, surtout pour les événements à probabilité très faible et à très grande probabilité de cause.

Voici une probabilité pour l'existence d'une action télépathique ; cette probabilité est énorme. Le nombre de cas est-il très grand; il est relativement très faible, surtout eu égard à ces chiffres.

On fait une enquête dans un milieu limité, et portant sur des faits passés; on demande de répondre « oui » ou « non » pour l'existence antérieure, dans des limites très vagues, de l'événement en question : une hallucination télépathique ! Puis on fait le rapport des « oui » aux « non » comme de deux quantités complètes. Il est de toute évidence que scientifiquement cela est sans valeur. Prenez un milieu considérable, d'au moins un million de personnes ; observez-les pendant un an, avec des moyens sérieux de contrôle, et comptez les événements en question. Etablissez ensuite leur probabilité et comparez au nombre total de cas observés : un événement d'une probabilité d'un millionième pour un jour, doit arriver une fois par jour pour un million de personnes. Ce n'est qu'avec des nombres suffisamment grands et vraiment complets et une observation rigoureuse que l'on pourra songer à utiliser le calcul des probabilités. Mais est-ce possible ? Evidemment non.

2° Egale possibilité des cas.

Mais cela serait encore peu de chose, et les difficultés soulevées ne sont rien auprès du second réquisit de l'application du calcul des probabilités à la recherche des causes.

Pour que des cas puissent être comparés et sériés, pour qu'ils puissent rentrer dans un calcul de probabilités, il faut que leur probabilité respective soit complètement définie, qu'ils présentent une égale possibilité, ou du moins une possibilité quantifiée pour être comparable.

Or cela est-il réalisé dans la question ?

L'exemple type est celui des boules dans une urne : mais cela suppose une identité absolue des différentes boules, qui ne peut dans la nature être parfaitement réalisée, sinon comme une conception et comme un rêve, jamais en fait. Cela supposerait même une identité absolue de position, ce qui est absurde. Nous disons que les différences de position sont des causes perturbatrices, car quelqu'un, qui, au moment du tirage, verrait la position respective des boules, pourrait dans une certaine mesure prévoir la nature du tirage. Mais on répond par le postulat de la compensation des différences qui peuvent ainsi se produire, grâce aux grands nombres.

Si des boules dans une urne ne peuvent déjà répondre parfaitement aux réquisits du calcul qui réclame l'identité et l'indifférence mathématique, comme la géométrie réclame des points, lignes et surfaces irréalisables dans la nature, à plus forte raison, quand on complique les données, s'éloigne-t-on de ces conditions essentielles, et on s'en éloigne d'autant plus que la complication devient plus grande.

Or, dans les sciences les plus simples, on ne fait pas appel au calcul des probabilités pour l'investigation des causes, car on peut arriver à les découvrir par des méthodes directes. C'est donc dans les sciences très complexes, où ces méthodes directes échouent souvent, que l'on voudra l'utiliser comme méthode. Mais l'égale possibilité des cas réclamée très énergiquement par Laplace ne sera plus, même approximativement, appréciable. La quantification n'en est plus possible.

Prenons les faits psychologiques. Pour que deux cas soient, sinon identiques, du moins comparables, il faut que toutes les circonstances accompagnant le fait, et les conditions du fait puissent être quantifiées comme les conditions d'apparition des boules tirées dans une urne : c'est dire qu'il faudra quantifier les rapports temporels, spatiaux, physiologiques, affectifs, qu'il faudra quantifier le passé psychologique de l'individu, et d'autres circonstances ignorées ; il faudrait quantifier l'inconnu et l'inquantifiable. Il faut absolument renoncer à une pareille prétention. Donc, toute application du calcul des probabilités à des sciences complexes, et, à vrai dire, à toute science, car toute science est complexe, est illégitime, car elle ne répond pas aux réquisits du calcul, même d'une façon approximative.

Vous faites une enquête sur les hallucinations télépathiques. Rendez-moi vos cas comparables. Si vous ne le pouvez pas, alors ne les comparez pas, considérez-les individuellement, c'est-à-dire renoncez à leur appliquer la formule du calcul des probabilités.

Ce qui est vrai des sciences psychologiques le sera donc encore plus des sciences sociales, d'autant qu'ici apparaît un élément nouveau de complication, la valeur du témoignage, appréciée elle aussi par le calcul des probabilités. Quelle est la probabilité du mensonge ?

Aussi ceux qui appliquent les probabilités aux résultats des enquêtes, et prétendent compromettre en leur faveur les probabilités feront bien de méditer ces lignes de Laplace que nous leur mettons sous les yeux :

« Ainsi, dit-il, les puissances successives d'une fraction moindre que l'unité diminuant sans cesse, un événement qui dépend d'une suite de probabilités fort grandes peut devenir extrêmement peu vraisemblable. » Il y a « dégradation de la probabilité des faits lorsqu'ils sont vus à travers un grand nombre de générations successives : plusieurs événements historiques, réputés certains, seraient au moins douteux, si on les soumettait à cette épreuve ».

« Dans les sciences morales, où chaque conséquence n'est déduite de ce qui la précède que d'une manière vraisemblable, quelque probables que soient ses déductions, la chance de l'erreur croît avec leur nombre et finit par surpasser la chance de la vérité (1). »

Puis, parlant de la probabilité individuelle de vérité ou de mensonge, qui est rapportée à la probabilité du fait raconté, un fait impossible donnant certitude du mensonge de celui qui le rapporte, Laplace déclare : « En étendant cette conséquence à tous les faits extraordinaires, il en résulte que la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin devient d'autant plus grande que le fait attesté est plus extraordinaire (2). »

Ainsi donc, de la très faible probabilité de coïncidence entre une hallucination et une mort, un probabiliste comme Laplace aurait pu conclure, non pas à l'existence d'une action télépathique, mais à la mauvaise foi des personnes interrogées.

Nous retrouvons pour la probabilité des causes la même ambiguïté dans l'interprétation des résultats que pour la probabilité des erreurs : faut-il rapporter les chiffres à un phénomène objectif réel, dans les événements observés, ou à un défaut systé-

---

(1) LAPLACE. *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris, 1819, 4 éd., in-8 p. 15,
(2) *Id.*, p. 145.

matique des instruments et des méthodes, ici le mensonge dans les témoignages.

Voilà une conclusion probabiliste qui ne serait pas faite pour plaire à nos probabilistes nouveau jeu.

Ainsi la probabilité des causes est encore moins applicable que la probabilité des erreurs. Non seulement les résultats ne sont pas toujours certains, mais les conditions requises ne peuvent être réalisées, et surtout dans les sciences les plus complexes, où l'on est le plus tenté de faire appel à ce calcul. Les grands nombres présentent une condition insuffisamment déterminée, et dépassant en tout cas la plupart du temps les forces humaines ; l'égale possibilité des cas, ou sa quantification, est quelque chose d'absolument irréalisable, particulièrement dans les sciences psychologiques et dans les sciences sociales, où s'ajoute encore l'élément de probabilité du témoignage.

Toutes les applications du calcul des probabilités s'évanouissent donc définitivement et sans recours quand on les examine d'un peu près [1].

CHAPITRE VI. — *Conclusion.*

Le calcul des probabilités comme méthode scientifique. — Ses avantages et ses causes d'erreurs.

Ce qui reste du calcul des probabilités, ce sont les probabilités simples, dont on peut dire, avec Laplace, qu'elles ne sont « que le bon sens réduit en calcul ».

En fait, nous nous conduisons la plupart du temps dans la vie par des probabilités, et souvent par des probabilités subjectives qui gagneraient à une quantification par laquelle elles perdraient peut-être de leur poids, mais cette quantification n'est pas pos-

---

[1] On trouvait nombre d'objections très judicieuses de M. BERTRAND à l'application du calcul des probabilités. Une démonstration systématique des lemmes impliqués par cette application n'a jamais été faite par lui.

— Notons encore la remarque d'un astronome, M. Jean Mascart qui fit voir tout « ce qu'il peut y avoir d'arbitraire dans l'application du calcul des probabilités aux phénomènes naturels » en l'appliquant. Jean MASCART. *Contribution à l'étude des Planètes télescopiques*, p. 63.