Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: 1. Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell.

La formule de *Bonnet* :

$$\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds} = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \sin\varphi \cos\varphi \tag{1}$$

qui détermine la torsion géodésique de toute courbe d'une surface, comprend, comme cas particuliers, celles d'*Enneper* pour les lignes asymptotiques :

$$R = \pm\sqrt{-\rho_1\rho_2} \tag{2}$$

et de M. *Kommerell* pour les géodésiques (*Archiv der Math. und Physik*, 3^e Reihe, B. I, S. 116-7) :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho}\right); \tag{3}$$

mais cette circonstance apparaît bien plus clairement, si l'on donne à la formule de Bonnet (1) une autre forme. En effet, éliminons φ entre (1) et l'équation :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2};$$

on a :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \sin^2\varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right), \quad \frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho} = \cos^2\varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right),$$

d'où la formule (1) se transforme en la suivante :

$$\left(\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho}\right); \tag{1'}$$

sous cette forme, on voit tout de suite qu'elle comprend la formule (2) pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, et la formule (3) pour $\omega = 0$. Plus généralement, pour les courbes $\omega = \text{const.}$, elle devient :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho}\right). \tag{1''}$$

Enfin, pour les lignes de courbure, elle donne le théorème dit de *Lancret* :

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{d\omega}{ds}.$$

A propos de la démonstration des formules (1), (2) et (3), je voudrais observer que la manière la plus courte de la faire, c'est de partir des équations :

$$\cos\omega = \frac{\zeta - p\xi - q\eta}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou :

$$\lambda = \frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mu = \frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \nu = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou enfin :

$$\xi = \frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \eta = \frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \zeta = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

respectivement, que l'on différentie et ajoute.

2. *Remarque sur les lignes de courbure.*

Dans toute ligne de courbure on a :

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\omega}{ds},$$

d'où :

$$\omega = \pm \int \frac{ds}{R} + c;$$

d'autre part :

$$\rho_1 \cos\omega = \rho,$$

ou :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{1}{\rho_1},$$

Donc :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\left(\pm\int \frac{ds}{R} + c\right)}{\rho},$$

et de même :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\cos\left(\pm\int \frac{ds'}{R'} + c'\right)}{\rho'}.$$

3. *Quand la trajectoire d'un mobile est plane, l'hodographe l'est aussi, quel que soit le mouvement*, car de la relation :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on tire :

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0;$$