P. Appell. — Traité de Mécanique rationnelle, t. III. Equilibre et mouvement des milieux continus. Paris, Gauthier-Villars. Un beau vol. gr. in-8º de 558 pages. Prix. : 16 fr.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

BIBLIOGRAPHIE

P. Appell. — **Traité de Mécanique rationnelle. t. III. Equilibre et mouvement des milieux continus.** Paris, Gauthier-Villars. Un beau vol. gr. in-8° de 558 pages. Prix : 16 fr.

Le tome troisième du *Traité de Mécanique rationnelle* termine le magistral ouvrage entrepris par M. P. Appell. Il ne m'appartient guère d'en faire l'éloge, si ce n'est par cette simple remarque que bien avant la publication du dernier volume, toute l'édition du premier était épuisée. Toutefois ceux qui comme moi se sont assimilés les méthodes de la Mécanique en étudiant cette œuvre simple et savante, se douteront bien que les questions, autrefois si obscures, de la Statique et de la Dynamique des fluides, vont être présentées à eux avec un intérêt nouveau et une clarté nouvelle.

Le volume débute par l'exposition analytique de formules qui sont d'un usage constant en Physique mathématique et en Mécanique : formules de Green, d'Ampère et de Stokes, qui servent à transformer une intégrale triple étendue à un volume, en une intégrale double étendue à la surface qui le limite, ou une intégrale double étendue à une aire en une intégrale simple étendue au contour de cette aire. La notion de *tourbillon* est introduite avec une grande simplicité et, par son emploi, on retrouve de façon toute naturelle des théorèmes connus d'analyse élémentaire. Ainsi écrire que $Pdx + Qdy + Rdz$ est une différentielle exacte, c'est écrire qu'un tourbillon est nul.

Après ces notions analytiques, nous abordons la théorie de l'attraction. M. Appell nous fait remarquer tout au début qu'on passe de l'attraction newtonienne aux attractions électriques et magnétiques, en remplaçant la constante positive f par une constante négative $-k$.

L'expression $-kmm'r^{-2}$ est bien alors positive, tout comme dans le cas d'une attraction newtonienne, si les masses m et m' sont de signes contraires. Si elles sont de même signe, il y a répulsion. Beaucoup de calculs cessent alors d'être des exercices analytiques et donnent des résultats tangibles. Au point de vue de la seule attraction newtonienne à quoi sert d'étudier l'action que peuvent avoir l'une sur l'autre deux portions de plans parallèles ?

En électricité, au contraire, ce calcul ne se présente-t-il pas naturellement dans l'étude du condensateur ?

Nous trouvons aussi une théorie succincte de l'aimant élémentaire et du potentiel d'une double couche magnétique.

Inutile de dire que les exemples de calculs d'attraction sont nombreux et variés ; les théorèmes d'Ivory sur les ellipsoïdes homofocaux sont, par contre, simplement cités comme exercices et rien n'est plus heureux que la suppression de démonstrations compliquées qui, dans certains traités, tiennent la moitié des pages réservées à l'attraction. Dans l'ouvrage de M. Appell ces pages ne sont pas prétextes à des subtilités analytiques qui font perdre de vue les applications à faire ultérieurement.

Nous passons ensuite aux propriétés générales des fonctions vérifiant l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ et dites *fonctions harmoniques*, puis aux masses attirantes illimitées et au potentiel logarithmique : pour les masses illimitées, l'auteur montre que le mot *attraction* peut ne plus avoir de sens, comme dans le cas du plan indéfini.

Ce n'est qu'après ces préliminaires que nous entrons, à proprement parler, dans l'étude de l'équilibre et du mouvement intérieurs *d'une masse continue*.

Il ne s'agit pas encore d'hydrostatique ou d'hydrodynamique, mais de généralités relatives à tout milieu continu gazeux, liquide ou solide, desquelles on déduira plus tard la mécanique des fluides et la théorie de l'élasticité. Il y a à signaler ici tout particulièrement la belle représentation géométrique de Cauchy pour la variation en direction de l'effort élémentaire, représentation semblable à celle que fournit l'ellipsoïde d'inertie dans la théorie des moments.

Au début de l'hydrostatique et, comme une des premières applications, nous rencontrons la formule barométrique discutée avec achèvement complet des calculs et même mise sous la forme qui s'accorde avec les tables de M. Mathieu, publiées dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*. Viennent ensuite le principe d'Archimède et l'étude générale de l'équilibre isotherme. Le cas où les forces dérivent d'une fonction de forces non uniforme est bien curieux ; il matérialise pour ainsi dire certaines conceptions de la théorie des fonctions. Soit la fonction de forces

$$U = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

uniforme dans toute surface fermée n'entourant pas l'axe des z ; elle permet un état d'équilibre à un fluide enfermé dans une telle surface. Mais si la surface entoure l'axe des z, le fluide se met en mouvement ; introduit-on une cloison pour empêcher ce mouvement, elle ne l'empêchera que si elle fait l'effet d'une coupure rendant à nouveau la fonction U uniforme.

Des considérations des plus utiles viennent ensuite sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, questions fondamentales en mécanique céleste et que les beaux travaux de M. Poincaré ont beaucoup avancées, surtout quant aux figures d'équilibres ellipsoïdales, annulaires et autres qui n'ont pas forcément plusieurs plans de symétrie. Après l'équilibre des fluides pesants nous trouvons celui des corps flottants. Le sujet date d'Archimède et cependant, après les travaux de M. Guyou, il paraît né d'hier. Je ne puis entrer ici dans tous les théorèmes élégants auxquels il donne lieu, mais le résultat fondamental est des plus simples à énoncer : la détermination de l'équilibre d'un corps flottant se ramène à celle de l'équilibre d'une certaine surface (surface des centres de carène) que l'on peut supposer réalisée matériellement et posée sur un plan horizontal rigide.

Avant d'entrer définitivement dans la Dynamique, M. Appell nous fait étudier les propriétés purement géométriques et cinématiques de la déformation des milieux continus.

L'équation de continuité est donnée sous une forme absolument générale et, dans l'étude des dilatations autour d'un point, nous retrouvons encore un ellipsoïde pour interpréter plus commodément les choses ; il y a là une représentation géométrique qui fait facilement image. Une déformation *homogène* d'une masse continue est caractérisée par ce fait que ces ellipsoïdes de dilatation sont égaux et orientés de la même façon en tous ses points. Pour une déformation quelconque, nous pouvons imaginer en chaque point de la masse une *déformation homogène tangente*, conception de même nature que celle du mouvement hélicoïdal tangent dans l'étude du déplacement d'un solide invariable et qui ne le cède en rien à cette dernière au point de vue de l'élégance et de l'utilité.

Dans la cinématique des milieux continus, nous trouvons un chapitre des plus importants sur la propagation des ondes. Les derniers résultats dus à M. Hadamard, y sont développés. L'onde est une surface qui se déplace et se déforme dans le milieu considéré, sur laquelle les dérivées des coordonnées prises par rapport à leurs valeurs initiales, ou par rapport au temps, cessent d'être continues.

Une discontinuité d'ordre n est celle où la première dérivée qui cesse d'être continue, est d'ordre n, toutes les dérivées d'ordre inférieur à n restant continues.

Les cas de $n = 1$ et $n = 2$ sont étudiés en détail par M. Appell. Les résultats généraux obtenus par M. Hadamard pour n quelconque, sont rappelés sommairement et leurs démonstrations sont proposées comme exercices.

Dans la dynamique des fluides parfaits, nous trouvons maintes choses remarquables, telles que le théorème d'Hugoniot et la détermination de la vitesse de propagation du son.

A remarquer aussi la transformation des équations de l'hydrodynamique pour le cas de coordonnées quelconques, transformation exactement comparable à celle qui change les équations ordinaires du mouvement d'un point ou d'un système en les équations de Lagrange.

Dans ces théories difficiles qui semblent si souvent dénuées d'applications et qui chez beaucoup de savants paraissent avoir été seulement prétextes à des développements analytiques, intéressants sans doute, mais qui faisaient perdre de vue les problèmes matériels posés au début, on ne saurait trop admirer l'auteur du présent ouvrage qui s'efforce de donner sans cesse des exemples de problèmes aussi simples que possible et de les résoudre complètement de façon à faire suivre les développements analytiques de réalités concrètes. Voici l'étude du mouvement d'un liquide pesant dans un vase de révolution présentant une large ouverture à la partie inférieure, et plus loin c'est le mouvement d'un liquide qui se précipite dans un espace sphérique brusquement laissé vide en son sein. Après les théorèmes de Bernoulli et de Torricelli et l'étude générale des écoulements en régime permanent nous tombons dans la théorie des tourbillons. Ce mot, défini au début d'une façon purement analytique, nous apparaît ici sous un jour matériel qui le justifie. Si les particules d'un fluide n'ont pas une rotation nulle, elles ont des mouvements tourbillonnaires et s'arrangent en tubes de tourbillons qui ne peuvent se terminer au milieu de la masse ; ces tubes sont donc fermés sur eux-mêmes ou terminés aux parois ou aux surfaces de discontinuité. Tels sont les anneaux de fumée que les fumeurs s'amusent à lancer. A côté de ce jeu que la théorie des tourbillons nous explique, faut-il rappeler qu'elle a été l'objet de la part de lord Kelwin, des plus hautes spéculations au point de vue cosmogonique et qu'il a émis cette hypothèse que les atomes qui constituent la matière qui tombe sous nos sens sont de minuscules tourbillons d'éther.

Dans l'exposition de la présente théorie, je signalerai comme particulièrement remarquable le problème qui consiste à déterminer la vitesse d'une particule fluide connaissant le tourbillon relatif au même point et aussi une analogie électro-dynamique des plus intéressantes. L'existence de tourbillons dans un liquide modifie évidemment les vitesses d'une particule quelconque ; or, si l'on considère l'ensemble de tous les tourbillons qui forment un tube annulaire, l'effet de l'existence de ce tube sur un point P de la masse est le même que celui qu'exercerait un courant électrique parcourant un fil conducteur de même figure que le tube tourbillonnaire sur le point P considéré comme un pôle magnétique.

Le chapitre qui termine la dynamique des fluides est consacré aux mouvements parallèles à un plan fixe.

Tous les problèmes relatifs aux milieux continus semblent évidemment exiger la considération de l'espace à trois dimensions, mais on peut, par la pensée, imaginer des milieux continus n'ayant que deux dimensions. Tel serait, par exemple, le milieu constitué par des molécules assujetties à rester sur un plan.

Cette fiction devient une réalité dans des milieux continus à trois dimensions où toutes les particules ont originairement des vitesses parallèles à un plan et où il est évident, par raison de symétrie, que ce parallélisme n'a pas lieu d'être altéré. Tels sont les cas d'écoulement dans un canal constitué latéralement par des plans verticaux et dont le fond est un cylindre de génératrices perpendiculaires aux parois. C'est notamment le cas d'un liquide qui s'écoule par-dessus un déversoir horizontal formant un plan perpendiculaire aux parois latérales d'un canal. Alors les équations du mouvement se réduisent à deux.

Il faut remarquer dans ces dernières pages l'étude de la propagation des ondes à la surface d'un liquide, les ondes stationnaires et le phénomène du clapotis. Quant à l'étude des mouvements tourbillonnaires, elle est reprise dans ce cas particulier. Si par exemple nous prenons un liquide dans un vase à parois verticales et à fond horizontal, en supposant que toutes les vitesses soient parallèles au fond, les tubes de tourbillon ne pourront évidemment être que des droites verticales. Les équations du mouvement de ces tubes, quand on les suppose infiniment déliés, se mettent aisément sous la forme canonique.

Le volume se termine par la théorie de l'élasticité, terminée elle-même par l'étude de la vibration des milieux élastiques et la comparaison des vibrations transversales qu'ils peuvent transmettre avec les vibrations longitudinales que transmettent les fluides parfaits.

Je citerai encore quelques pages sur les fluides visqueux et j'aurai peut-être donné une pâle idée des nombreux sujets abordés par M. Appell ; mais ce dont je renonce à donner aucune idée, c'est, d'un côté, la clarté avec laquelle tout est présenté, d'un autre, la patience de l'auteur qui a recueilli d'innombrables renseignements bibliographiques et a partout indiqué ce qui reste à faire après ce qui est fait à l'heure actuelle. Et comme les deux premiers volumes du traité ne le cèdent en rien au troisième, je crois qu'on peut conseiller à tous ceux qui veulent acquérir une haute idée de la science et de l'art mathématiques, d'entrer dans ce magnifique monument élevé à la mécanique rationnelle.

A. Buhl (Paris).

P. Bachmann. — **Niedere Zahlentheorie,** Erster Teil. *B.-G. Teubner's Sammlung* von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band X, 1. — Un vol. relié, gr. in-8°, 402 p. ; prix : M. 14. — ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1902.

A côté de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, qui a déjà rendu de si grands services aux géomètres, la librairie Teubner a entrepris la publication d'une collection de traités séparés consacrés aux parties les plus importantes de la science mathématique. On ne saurait contester l'utilité d'une telle publication. En effet, les articles de l'Encyclopédie ne contiennent que des résumés et des aperçus dans lesquels les résultats acquis à la science sont systématiquement classés et enregistrés. C'est un guide précieux, mais ce n'est qu'un guide. Pour les développements, démonstrations, etc., on doit recourir aux sources : monographies, notes, mémoires disséminés dans les comptes rendus et les revues périodiques. Bien rares sont encore les traités spéciaux, assez complets pour pouvoir donner une idée exacte de l'état actuel de nos connaissances mathématiques, assez intelligibles en même temps pour servir de livres d'initiation.

A en juger par le premier volume qui vient de paraître, l'ouvrage de M. Bachmann remplit admirablement le but que vise la *Collection Teubner*.

Après une courte introduction historique, l'auteur examine et précise la notion du nombre entier positif et négatif en se plaçant au point de vue de M. Dedekind, mais il simplifie et complète sur quelques points l'analyse du célèbre géomètre allemand. Le second chapitre est consacré à la théorie de la divisibilité. Les lois fondamentales de cette théorie sont établies en partant de la notion moderne des modules que l'on doit à Kronecker et à M. Dedekind. M. Bachmann établit ensuite un certain nombre de propositions se rattachant à la théorie précédente, en particulier la formule d'Euler donnant la somme des diviseurs d'un nombre et quelques propriétés très curieuses de la factorielle dues à Weill, Catalan et autres.

Le troisième chapitre expose les principes de la théorie des congruences : systèmes de restes, nombre maximum de racines, etc. Parmi les applications de cette théorie on remarquera les propriétés générales de la fonction $\varphi(n)$ et celles des fonctions plus générales de Lucas et de Schemmel.

L'auteur reprend ensuite au 4e chapitre la théorie de la divisibilité. Mais cette fois-ci il en établit le théorème fondamental au moyen de l'algorithme d'Euclide (procédé de Poinsot) ce qui le conduit naturellement aux fractions continues et à la théorie des séries de Farey, théorie à laquelle se rattachent les recherches relativement récentes de M. Hurwitz et de M. Vahlen.

Le 5e chapitre traite des théorèmes de Fermat et de Wilson.

Un long chapitre est consacré à la théorie des résidus quadratiques. C'est incontestablement le plus curieux. On y remarquera une table chronologique des différentes démonstrations de la fameuse loi de réciprocité de Legendre. Ces démonstrations, dont on connaît environ une cinquantaine, sont divisées en catégories et celles d'entre elles qui appartiennent aux éléments de la théorie des nombres sont analysées avec soin.