III L'Infini géométrique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

que des coordonnées X et Y, de sorte que les systèmes de valeurs X, Y et $X + 2\pi R$, $Y + 2\pi R$, représentent le même point.

Les coordonnées x et y sont également des fonctions périodiques de X et Y, mais de période πR, de sorte qu'aux deux points X, Y et $X + \pi R$, $Y + \pi R$ correspond le même système de valeurs x, y.

En laissant de côté un des deux points correspondants à x et y, on ne considère, en faisant varier x et y de $-\infty$ à $+\infty$, que la demi-sphère limitée par un grand cercle ayant pour pôle le point O. Le groupe euclidien ayant un contact en O avec le groupe des déplacements sphériques est représenté par le groupe projectif continu en x, y, conservant l'équation

$$x^2 + y^2 = 0.$$

La courbe de l'infini relatif à ee système euclidien est le grand cercle ayant pour pôle le point O.

Par un de ces déplacements euclidiens, un point quelconque de la demi-spère ne pourra jamais atteindre ce grand cercle.

Les rotations euclidiennes autour du point O se confondent avec les rotations sphériques.

Une translation euclidienne sera une transformation dans laquelle tous les points décrivent des grands cercles perpendiculaires à un même grand cercle passant par le point O. On voit que ces grands cercles rencontrent le grand cercle de l'infini au même point. Ils jouent le rôle des parallèles de la géométrie plane ordinaire.

Ainsi se trouvent réalisées, sur la sphère, deux géométries : l'une non-euclidienne, qui est relative aux déplacements vulgaires de la sphère ; l'autre euclidienne, qui comprend un ensemble de de propriétés susceptibles d'être exprimées par les mêmes propositions que les propriétés de la géométrie plane ordinaire.

III

L'Infini géométrique.

Diverses conceptions de la ligne droite et du plan. — Nous nous sommes efforcés, dans les pages précédentes, en variant les figures que l'on peut faire correspondre à une même relation logique, de détruire certaines associations d'idées, et de montrer notamment que la détermination métrique des longueurs et des angles constitue une idée indépendante de la conception même des figures.

La conclusion qui s'en dégage est celle-ci :

On peut, tout en maintenant les concepts vulgaires du point, de la droite et du plan, obtenir des géométries conséquentes avec elles-mêmes en modifiant d'une certaine manière l'idée de la détermination métrique, de sorte que les propriétés où intervient l'idée de mesure peuvent être très différentes de celles de la géométrie ordinaire.

On comprend que la somme des angles d'un triangle ne soit plus égale à deux angles droits, si la mesure des angles est tout autre qu'en géométrie euclidienne et si les angles droits eux-mêmes ne sont pas ceux de cette géométrie.

Il semble, dans ces conditions, qu'on ne doive rencontrer aucune difficulté à admettre les conceptions nouvelles à côté des conceptions ordinaires.

C'est pourtant dans les difficultés que l'esprit éprouve à créer des images géométriques correspondantes aux concepts des géométries non-euclidiennes que l'on doit voir l'origine de la répugnance qu'ils inspirent à certains esprits.

C'est que, contrairement à nos prévisions, ce ne sont pas seulement nos conceptions de la mesure qui exigent des modifications, mais encore nos conceptions de la droite et du plan et surtout de l'infini. Il y a là un fait inattendu qui doit être examiné.

Nous pouvons nous borner au cas de la géométrie sphérique (ou riemannienne).

Considérons d'abord la géométrie sur la ligne droite.

On a vu que la détermination riemannienne s de la distance à un point O est liée à la détermination euclidienne x ayant un contact avec la premiàre en O par la formule

$$x = 2\,c' \operatorname{tang} \frac{s}{2\,c'}.$$

La présence d'une fonction trigonométrique suggère l'assimilation de la droite au cercle, c'est-à-dire l'hypothèse que deux valeurs de $\frac{s}{2c'}$ ne représentent un même point de la droite que lorsque ces valeurs diffèrent d'un multiple de 2π, de sorte qu'on doit, à chaque point de la conception euclidienne déterminée par une valeur de $\frac{s}{2c'}$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, associer un point étranger à cette conception et correspondant à la valeur $\frac{s}{2c'}+\pi$.

Les points de la droite vers lesquels on tend par les déplacements euclidiens effectués dans les deux sens et qui, dans la conception ordinaire, se confondent, seraient séparés par un segment correspondant point par point au segment de cette dernière conception.

Cette nouvelle conception de la ligne droite est tout aussi légitime que la conception ordinaire comportant un point à l'infini, vers lequel on tend en se déplaçant dans un sens ou dans l'autre.

Mais on peut tout aussi légitimement admettre que les deux points correspondants à une valeur de x, que nous avons séparés, soient de nouveau réunis et que les angles $\frac{s}{2c'}$ et $\frac{s}{2c'}+\pi$ représentent le même point de la droite.

A chacune de ces conceptions correspond une conception du plan et une conception de l'espace ; d'où deux sortes de géométries correspondantes à la même détermination métrique.

Dans l'une de ces géométries, à laquelle M. Klein réserve la dénomination de *Géométrie sphérique* en raison de sa plus grande analogie avec la géométrie sur la sphère, l'on admet que l'espace comprend des points situés au-delà de l'infini euclidien.

Dans l'autre Géométrie, appelée par M. Klein *Géométrie elliptique*, l'espace ne comprend que les points de la conception vulgaire.

Degré de connexité du plan. — La question relative au nombre de points de l'espace qui correspondent à un même système de valeurs des coordonnées nous paraît être indépendante de celle des parallèles, quoique ce soit l'étude de cette dernière qui nous y ait conduits.

La question se pose, non seulement indépendamment de toute particularisation de la détermination métrique, mais encore en l'absence de toute idée de détermination métrique.

Nous nous en rendrons compte au moyen de la Géométrie projective sur la ligne droite.

On sait que l'on peut déterminer la position d'un point sur la ligne droite, sans l'intervention de l'idée de distance, au moyen d'un système général de coordonnées projectives, le système étant caractérisé par le choix des points correspondants à trois valeurs de la coordonnée, par exemple 0, 1 et ∞.

Chacun des points de la droite est déterminé univoquement par un nombre compris entre $-\infty$ et $+\infty$, les nombres $-\infty$ et $+\infty$ correspondant au même point, et le point de l'infini sur la droite correspondant à une valeur quelconque.

On peut d'ailleurs, par des transformations projectives, amener le point de l'infini en un point quelconque en lui faisant parcourir la droite dans un sens ou dans l'autre, et amener un point quelconque en un autre point quelconque en passant par le point de l'infini.

Il résulte de là que les propriétés projectives d'une ligne droite sont celles d'une ligne *fermée* (certains disent *illimitée*).

Pour des raisons analogues, le plan doit être considéré comme une surface fermée.

Mais alors nous nous trouvons en présence de ce fait : Etant donnée une droite D (ligne fermée) sur un plan (surface fermée), un point peut, en suivant une ligne droite, passer d'un côté à l'autre de la droite D sans traverser cette ligne, propriété qui indique que le plan est une surface à double connexité.

En outre, on peut obtenir le résultat indiqué au moyen d'une trajectoire différant aussi peu que l'on voudra de la droite D, ce qui exige que le plan soit une surface *double*. On peut former par exemple une surface double en réunissant les petits côtés d'une bande de papier, de manière à séparer les angles qui seraient réunis si l'on voulait obtenir une surface cylindrique.

Du fait que le plan est une surface double résulte la propriété suivante :

Si l'extrémité d'un stylet décrit une ligne droite du plan dans toute son étendue, le stylet, revenu au point de départ, sera du côté du plan opposé à celui où il se trouvait au départ.

Mais on peut interpréter autrement les propriétés projectives. Rien n'empêche de concevoir, comme nous l'avons déjà mentionné, que chaque système de valeurs des coordonnées projectives représente deux points de l'espace, savoir celui de la conception habituelle, et un autre situé au delà de l'infini euclidien.

Dans cette dernière conception de l'espace, le plan serait une surface fermée simple et à simple connexité, et deux lignes droites situées dans un même plan se couperaient en deux points, dont l'un situé au delà de l'infini euclidien.

On voit que des conceptions diverses de l'espace peuvent correspondre à la même forme analytique.

Dissociation des idées d'espace et d'infini. — Les propriétés projectives des figures doivent être les mêmes pour toutes les Géométries métriques que nous avons étudiées, puisque les lignes droites et les plans de ces Géométries sont les mêmes lignes de l'espace ; les considérations que nous venons de développer sont donc communes à ces Géométries.

En se bornant aux deux formes d'espace envisagées ci-dessus, la ligne droite est une ligne fermée et le plan, une surface fermée. Ces conceptions de la droite et du plan, quoique d'origine projective, doivent évidemment s'accorder avec la conception euclidienne et par suite, en dépit de l'intuition vulgaire, l'idée de l'infini doit être compatible avec celle d'une ligne et d'une surface fermées. Il faut donc franchement nier cette incompatibilité qui n'est qu'apparente.

La difficulté d'obtenir une représentation visuelle d'un fait ne nous paraît pas être une objection contre la réalité de ce fait.

Quand nous nous représentons la sphéricité de la terre, ce n'est pas avec des images de faits terrestres, telles que les impressions d'un voyageur qui parcourrait un méridien, mais bien avec l'image d'une boule de petites dimensions.

Nous interprétons un fait nouveau pour nous au moyen des images antérieurement acquises par notre esprit, et cela n'est pas toujours possible.

D'ailleurs quelles images visuelles correspondent à l'idée de l'infini euclidien ?

Ce point à l'infini sur une droite, qui coïncide avec celui vers lequel on tend en s'éloignant dans l'autre sens ; ce plan de l'infini, que l'on rencontre en prenant n'importe quelle direction, ne sont pas plus concevables en somme qu'une idée de l'espace privée de celle de l'infini en tant que propriété intrinsèque.

Résultant uniquement de la nature du mouvement au moyen duquel on suppose l'espace parcouru, l'idée de l'infini doit être séparée non seulement de l'idée d'espace, mais encore de celle des lignes que nous qualifions d'infinies ; on peut même la faire disparaître totalement moyennant une modification de la notion de distance.

N'est-il pas naturel d'ailleurs que l'idée de l'infini, qui n'est autre que celle d'une opération indéfiniment répétée ou continuée, soit liée à la nature de cette opération elle-même ?

D'ailleurs cette idée, ainsi que l'idée parente d'infiniment petit, constituent-t-elles, dans la science mathématique, autre chose que des procédés analytiques, remarquablement féconds, permettant de déduire de certaines propriétés particulières, tenues pour exactes dans un domaine déterminé, d'autres propriétés valables seulement pour ce domaine, mais procédés impuissants, comme l'analyse mathématique elle-même, à fournir des idées légitimes sur les propriétés particulières d'un autre domaine, auquel peuvent ne pas être applicables les idées que cette analyse a prises comme point de départ ?

C'est ainsi qu'il serait vain de vouloir, au moyen de l'analyse infinitésimale et sans autres expériences que celles qui s'appliquent aux corps de dimensions ordinaires, se faire des idées sur la constitution intime de ces corps et sur les propriétés des particules présentant des dimensions d'un autre ordre de grandeur.

A plus forte raison, les idées de l'infini et de l'infiniment petit, qui sont d'origine mathématique, ne sauraient répondre à aucune propriété intrinsèque d'un concept figuré.

L'idée de l'infini n'est donc pas inhérente à celle d'espace ; cette dernière peut être en effet séparée de celle de détermination métrique, et par suite de celle de l'infini, qui peut en résulter. En particulier, celle-ci peut être exclue de la Géométrie projective et à plus forte raison de l'*Analysis situs*.

Ce n'est pas seulement relativement à l'infini que l'on a doté l'idée d'espace de propriétés intrinsèques qu'elle ne comporte pas.

Que penser des idées illusoires de *forme*, *nature*, *structure* de l'espace, notions inconsistantes, qu'il convient d'abandonner aux métaphysiciens, lesquels semblent se complaire, en mauvais architectes, à construire des édifices d'autant plus élevés que les fondements en sont plus précaires ?

Le mot *espace* doit perdre sa prétentieuse importance pour devenir l'expression vague de la faculté que nous avons de localiser les objets ou, ce qui revient au même, de la propriété qu'ont les objets d'être localisés.

(*A suivre.*) G. COMBEBIAC (Limoges).