Chapitre II. —Exposition des principes et des problèmes du calcul des probabilités.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

CHAPITRE II. — *Exposition des principes et des problèmes du calcul des probabilités.*

Qu'est-ce que c'est qu'une probabilité? — Les théorèmes des probabilités. — Le théorème de Bernoulli. — Le théorème de Stirling. — Probabilité de l'écart. — Le problème de Buffon. — Intégration des formules. — Données critiques de Bertrand. — L'écart probable. — L'écart moyen. — La probabilité des erreurs.

Dans l'examen du calcul des probabilités, nous ne chercherons pas à faire un exposé trop connu des définitions élémentaires. Nous voulons seulement mettre quelques points en lumière, qui nous paraissent trop souvent négligés, et sur lesquels nous reviendrons dans la suite.

La probabilité d'un événement se définit, comme on le sait, par le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée de cet événement au nombre total des cas possibles. Mais il y a ici un postulat indispensable, c'est à savoir l'égale possibilité de ces différents cas possibles ; sans cela, comme le fait remarquer M. Bertrand, on pourrait ne considérer que deux cas possibles : l'arrivée, et la non-arrivée de l'événement : un seul étant favorable, la probabilité serait toujours $\frac{1}{2}$.

Cependant il n'est pas toujours nécessaire d'avoir cette égale possibilité des différents cas, mais c'est à une condition expresse : il faut alors déterminer la probabilité de ces différents cas, et leur attribuer comme coefficient la valeur qui mesure cette probabilité propre pour chacun d'eux.

Il y a là un postulat initial absolument fondamental dans ce calcul; s'en passer équivaudrait à vouloir faire de la géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide. Nous verrons si ce postulat initial a toujours été scrupuleusement respecté.

Nous n'insisterons pas sur les théorèmes des probabilités totale et composée, et nous aborderons immédiatement le point capital du calcul, le théorème de Bernoulli ; il permet de mesurer pour un nombre donné d'épreuves m, la probabilité P pour qu'un événement E, d'une probabilité simple égale à p, la probabilité inverse étant égale à q, arrive un nombre donné de fois.

La combinaison la plus favorable se trouve être celle dans laquelle le nombre d'arrivées de l'événement E est mp et celle de l'événement inverse mq. Cette probabilité maxima est donnée par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}.$$

Il faut noter que cette formule n'est obtenue que par un certain nombre d'approximations. La plus importante est l'application de la formule de Stirling, qui donne un équivalent plus simple des produits des premiers nombres. D'après elle,

$$1.2.3\ldots\,n = e^{-n}\,n^n\sqrt{2\pi n}.$$

Or cette formule n'est à peu près exacte que pour une valeur très considérable de n.

M. Bertrand donne la comparaison des deux termes pour $n = 20$. Voici les résultats :

$$1.2.3\ldots\,20 = 2.432.902.008.176.640.000$$
$$e^{-20}\,20^{20}\sqrt{40\pi} = 2.422.786.385.510.400.000.$$

Si le rapport des deux valeurs est 1,00417, il n'en est pas moins vrai que la différence absolue est énorme : elle est de l'ordre des dizaines de quatrillions.

On peut donc dire que pour $n = 20$, on a une approximation absolument insuffisante.

La probabilité maxima diminue à mesure que les épreuves augmentent, car m se trouve au dénominateur, c'est-à-dire que l'on trouvera un écart de plus en plus probable entre le nombre probable et le nombre réel d'arrivées de l'événement E. Soit h cet écart entre mp et mx.

On tire de la probabilité maxima, en faisant encore appel au théorème de Stirling, la probabilité de cet écart pour laquelle M. Bertrand donne la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\,e^{-\frac{h^2}{2mpq}}. \tag{1}$$

Il rend cette fonction de h continue en substituant à h une variable continue : il considère l'écart comme compris entre z et $z + dz$. La formule devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{z^2}{2mpq}} dz.$$

La probabilité alors pour que z soit inférieur à une limite donnée α, c'est-à-dire pour que l'écart soit compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{z^2}{2mpq}} dz$$

et, en posant

$$t = \frac{z}{\sqrt{2mpq}},$$

$$P_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2mpq}}} e^{-t^2} dt.$$

Dans chaque cas particulier, cette probabilité P_α s'obtiendra par les valeurs $\Theta(t)$ de la fonction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \Theta(t).$$

La probabilité pour avoir un écart inférieur à une limite donnée α étant $\Theta(t)$, la probabilité pour avoir un écart égal ou supérieur à cette limite sera $1 - \Theta(t)$. C'est-à-dire que l'expression

$$1 - \Theta(t) \tag{2}$$

peut être considérée comme la probabilité d'un écart p si l'on pose

$$t = \frac{h}{\sqrt{2mpq}}.$$

Par conséquent, la formule de la valeur probable de l'écart donné par M. Bertrand sera équivalente à celle-ci.

On aura

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}} = 1 - \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

Et en effet, M. Bertrand semble considérer ces formules comme équivalentes, car il les emploie fréquemment l'une pour l'autre.

Nous voyons, au chapitre VII, page 124, qu'il résout ce problème.

Buffon a jeté une pièce de monnaie 4 040 fois et obtenu 2 048 fois face.

Quelle est la probabilité de l'écart $h = 28$?

$$mp = 4040 \times \frac{1}{2} = 2020. \quad mx = 2048. \quad mx - mp = 28.$$

Il donne d'abord la formule (1) de la probabilité de l'écart. Puis il cherche par l'intégrale la probabilité de l'écart moindre, qui lui donne $\Theta(0{,}62) = 0{,}619$.

Et il cherche par $1 - \Theta(t)$ la probabilité de l'écart égal ou supérieur à 28, qu'il trouve ainsi égale à 0,38.

Or cette assimilation des deux formules, et cette égalité que nous avons posée est tout simplement absurde : l'un des deux termes est une simple fonction, le second est le résultat d'une intégration. Or il n'y a pas d'assimilation possible entre l'intégrale et la fonction.

L'intégrale est à la fonction comme une aire est à une courbe. C'est ainsi qu'une courbe peut présenter un maximum sans que l'aire cesse de s'accroître.

Or justement la fonction (1) présente un maximum, ce qui, au point de vue du calcul des probabilités est absurde.

Prenons donc l'expression

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}}$$

et formons sa dérivée.

Pour simplifier l'écriture, prenons

$$\sqrt{2mpq} = \frac{1}{x}.$$

La fonction (1) devient

$$y = \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

La dérivée y' sera

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} + \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} (-2h^2x).$$

En mettant $\frac{e^{-h^2x^2}}{\sqrt{\pi}}$ en facteur commun, on a l'expression

$$\frac{e^{-h^2x^2}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - 2h^2x^2\right].$$

L'on voit aisément que le maximum est obtenu pour $2h^2x^2 = 1$, c'est-à-dire pour $x^2 = \frac{1}{2h^2}$, ou pour $x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$.

Ainsi quand $x < \frac{1}{h\sqrt{2}}$, la fonction croît; quand $x > \frac{1}{h\sqrt{2}}$, la fonction décroît.

Si nous avons maintenant

$$\sqrt{2mpq} = \frac{1}{x}$$

ou

$$2mpq = \frac{1}{x^2},$$

ce maximum est obtenu pour

$$m = \frac{1}{2pqx^2} = \frac{h^2}{pq}.$$

Ainsi le maximum de la fonction (1) est obtenu pour une valeur de m égale à une fraction dont le numérateur est le carré de l'écart h et le dénominateur le produit de la probabilité p de l'événement E par la probabilité inverse q de l'événement E' $(p + q = 1)$.

C'est ainsi que, si l'on fait $p = q = \frac{1}{2}$, $h = 10$, on a, pour $m = 40$, par les calculs logarithmiques,

$$\mathrm{P}\,(h) = 0{,}0009,$$

pour $m = 400 = \dfrac{h^2}{pq}$

$$\mathrm{P}\,(h) = 0{,}024,$$

et pour $m = 4\,000$

$$\mathrm{P}\,(h) = 0{,}00015.$$

Ainsi donc, la probabilité d'un même écart absolu de 10 qui, raisonnablement (et d'après M. Bertrand lui-même), doit croître avec le nombre des épreuves (et, en effet, la ruine des joueurs se fonde sur les oscillations de plus en plus grandes des écarts absolus, malgré la diminution des écarts relatifs), diminuerait, d'après cette formule quand on aurait dépassé $\dfrac{h^2}{pq}$.

Et, comme la formule nécessite m très grand, il y aurait décroissance continue de cette probabilité.

Il est curieux que l'on n'ait pas mis en lumière cette absurdité.

M. Bertrand, quand il applique sa formule, ne fait jamais varier m, mais h, et, en effet, ici il y a diminution continue de la fonction pour un accroissement continu de h, m étant constant.

C'est ainsi que M. Bertrand donne cet exemple (1) :

$$m = 1000. \quad p = q = \frac{1}{2}$$

On a, pour $h = 40$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\,\pi}}\, e^{-3,2} = 0{,}0010285\,;$$

pour $h = 60$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\,\pi}}\, e^{-7,2} = 0{,}00001883\,;$$

pour $h = 100$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\,\pi}}\, e^{-20} = 0{,}0000000032006.$$

Les valeurs données par la formule (2)

$$1 - \Theta\,(t)$$

(1) Bertrand. *Calcul des probabilités*. Paris. 1889, p. 78, 79.

diffèrent donc de plus en plus, à mesure que m augmente, des valeurs de la formule (1).

C'est ainsi que dans les exemples que nous avons donnés plus haut, pour $m = 40$, nous avions :

$$\mathrm{P}\ (h) = 0{,}0009,$$
$$1 - \Theta\ (t) = 0{,}0016\ ;$$

pour $m = 400 = \dfrac{h^2}{pq}$,

$$\mathrm{P}\ (h) = 0{,}024$$
$$1 - \Theta\ (t) = 0{,}32\ ;$$

pour $m = 4\,000$,

$$\mathrm{P}\ (h) = 0{,}00015$$
$$1 - \Theta\ (t) = 0{,}7556.$$

Et, dans l'exemple du problème de Buffon, de M. Bertrand, $m = 4040 > \dfrac{h^2}{pq}$, au lieu de $1 - \Theta = 0{,}619$ qu'il a trouvé, l'application de la formule (1) donne $\mathrm{P}(28) = 0{,}008515$.

Ainsi donc, c'est la seule formule (2) : $1 - \Theta(t)$ qui doit être gardée pour mesurer la probabilité d'un écart (h), Θ mesurant la probabilité d'un écart moindre, c'est-à-dire encore la probabilité de la cause.

Mais l'application de cette formule nécessite m très grand.

Notons au passage que, dans le calcul des probabilités, quand on rencontre un écart, il faut en chercher la probabilité, et qu'il y a une formule pour la probabilité des causes. Cela n'est pas inutile, car nous aurons à y revenir, quand nous traiterons des applications du calcul.

Il y a d'ailleurs un écart probable, c'est-à-dire qui a probabilité égale d'être ou de n'être pas surpassé ; c'est l'écart α défini par l'équation :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2mpq}} = 0{,}476936,$$

ou

$$\alpha = 0{,}47693\ \sqrt{2mpq},$$

car

$$\Theta\ (0{,}47693) = \frac{1}{2}.$$

Quant à l'écart moyen, considéré comme donnant la valeur probable de l'écart, dans une série m d'épreuves, il est de

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mpq} = 0,79789\sqrt{mpq}.$$

C'est ainsi que, dans le problème de Buffon, la valeur probable de l'écart était de 24,7, alors que l'écart réel était de 28. L'écart probable était de 21 environ. Le rapport des deux écarts doit être de 0,8463. Cela est encore très important à mettre en relief : le calcul des probabilités admet un écart, et un écart probable contre le nombre probable d'arrivées mp d'un événement E, et le nombre réel mx d'arrivées de cet événement, et non seulement ce calcul l'admet, mais il l'exige. Une très grande régularité est considérée comme l'indice d'une cause régulatrice corrigeant les écarts nécessaires dus au hasard.

M. Bertrand [1] a proposé de chercher quel est l'écart dans la proportion des naissances des filles et des garçons, qu'il y a 10 000 à parier contre 1 de franchir au moins une fois en cent ans.

Il trouve cet écart égal à 99.

Si l'on a $9,2\,n = 100$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} = 0,092$, il y a 10 000 à parier contre 1 pour que l'événement de probabilité $\frac{1}{n}$ arrive une fois au moins sur 100 épreuves.

Or la probabilité d'un écart, pendant une année, plus grand que λ sur 14000 naissances, est :

$$1 - \Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

Cela doit être égal à 0,092, et par conséquent,

$$\Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}\right) = 0,908.$$

Il faut alors $\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}} = 1,19$.

On en déduit $\lambda = 99$.

---

(1) Bertrand, p. 162, 163.

« Si dans un siècle, conclut M. Bertrand, l'écart n'avait pas une seule fois dépassé 99, si sur 14000 naissances annuelles, le nombre des garçons s'était maintenu entre 7300 et 7100, une cause régulatrice serait presque certaine ; il y a 10 000 à parier contre 1, *a priori*, pour que le hasard, sur cent épreuves tentées dans la même urne, ne maintienne pas une telle régularité (1). »

Ainsi, quand la probabilité d'un écart égal ou supérieur à l'écart réel est très forte, il y a probabilité égale d'une cause régulatrice, de même que, quand cette probabilité est très faible, il y a probabilité égale d'une cause perturbatrice, et dans la mesure par conséquent où la valeur réelle est inférieure ou supérieure à la valeur probable de l'écart.

Il est donc absolument illégitime, de par le calcul des probabilités lui-même, de compter sur une régularité absolue des événements dus au hasard, et de leur répartition proportionnelle à leurs probabilités respectives. Nous verrons que c'est encore un point que l'on oublie trop souvent, si du moins ceux qui parfois prétendent appliquer le calcul des probabilités se sont jamais donné la peine de l'apprendre.

Il y a encore une formule fournie par le calcul des probabilités et qui peut servir à de nombreuses applications, c'est celle qui concerne l'erreur probable et la probabilité des erreurs dans les observations scientifiques.

La loi de probabilité des erreurs qui dépendent de tant de facteurs n'est nécessairement accessible au calcul que d'une façon très imparfaite. Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace ont fait des hypothèses que les faits ont démenties.

C'est à la loi établie par Gauss que l'on s'est rallié.

Elle part de ce postulat que la valeur la plus probable entre plusieurs mesures d'une grandeur est la moyenne des grandeurs obtenues, postulat qui n'est vérifié qu'approximativement.

On obtient comme formule de probabilité d'une erreur comprise entre z et $z + dz$,

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2} dz.$$

(1) *Ibid.*, p. 163.

Celle d'une valeur plus petite que α, en valeur absolue, sera :

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-k^2z^2}\, dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\alpha} e^{-t^2}\, dt = \Theta\,(k\alpha).$$

Connaissant la valeur de l'erreur probable, on peut en fonction de celle-ci trouver la probabilité d'une erreur.

L'erreur probable r est donnée par deux formules dont les résultats divergent à la troisième décimale :

$$r = 0,8453\, \frac{\Sigma\delta}{n}$$

$$r = 0,6745 \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}},$$

h est le nombre des épreuves.

$\Sigma\delta$ est la somme des erreurs résiduelles qui doivent être connues (on a là un moyen de mesurer le degré de confiance d'une série d'observations ; $\frac{1}{r^2}$ sera le poids d'une observation).

On peut donc ainsi connaître l'erreur probable, qu'il y a probabilité $\frac{1}{2}$ de surpasser ou de ne pas surpasser.

M. Nikolaus Wuich a construit sur ces données un tableau reproduit par Bertrand.

Il donne la probabilité d'une erreur en fonction de l'erreur probable, sur 10 000.

Ainsi il y a probabilité 5 000 $\left(\frac{5\,000}{10\,000} = \frac{1}{2}\right)$ pour 1 fois l'erreur probable ; probabilité 54 pour 0,01 fois l'erreur probable ; probabilité 9 993 pour 5 fois l'erreur probable (ou, suivant la notation habituelle, probabilités 0,5 ; 0,0054 ; 0,9993).

Enfin, en faisant les mesures $= n$, la moyenne $= m$, la variation moyenne $= v$ $\left(\text{moyenne des écarts par rapport à la moyenne} = \frac{\Sigma\delta}{n}\right)$, et, si l'on a deux moyennes de mesures analogues, on atteint une différence d.

Quelle est, peut-on se demander, la probabilité de cette valeur d considérée comme une erreur.

On considère la précision K comme égale à $\frac{1}{v\sqrt{\pi}}$.

On fait la moyenne générale M et t, considéré comme le produit de l'erreur par la précision devient $t = K\sqrt{n}(M - m)$, et

$$t = \frac{n_1\sqrt{n}\,dv}{\sqrt{\pi}\,(nv_1^2 + n_1 v^2)}$$

avec des simplifications.

La probabilité d'avoir une mesure égale à m sera égale à $1 - \Theta(t)$, ce qu'un tableau peut nous fournir.

Ainsi donc, non seulement le calcul des probabilités fournit un écart probable et la probabilité d'un écart entre le nombre probable et le nombre réel d'arrivées d'un événement, mais encore une erreur probable et la probabilité d'une erreur, c'est-à-dire d'un écart entre une valeur observée et une valeur réelle (et non plus probable), le plus souvent ignorée (et à laquelle on substitue la moyenne des valeurs, considérée comme la valeur la plus probable).

Ce dernier calcul présente encore bien plus d'éléments subjectifs que le premier. En tout cas il y a lieu de ne pas confondre, ce que nous verrons qu'on a fait, l'erreur et l'écart.

Et maintenant, que peut-on tirer de ce calcul de la probabilité des erreurs? Nous verrons ce qu'on en a tiré. Nous verrons ensuite si l'on en peut légitimement tirer quelque chose.

Chapitre III. — *Le calcul des probabilités peut-il servir à la connaissance de l'avenir.*

Opinion de Laplace. — Opinion de M. Poincaré. — Application du calcul de probabilité aux jeux de hasard ; exemple. — Les probabilités partielles. — Les opinions et les critiques de Cournot.

Le calcul des probabilités peut-il servir à la connaissance de l'avenir? Nous avons vu qu'un historien des sciences occultes en faisait un mode de divination spécial. Seulement, ce n'est pas là une autorité suffisante. Mais nous nous trouvons souvent en présence de joueurs qui dans leurs mises s'efforcent de suivre les indications du calcul des probabilités. Si l'on joue à la roulette,