L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?

L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN ?

(*Suite*).

IV

Géométrie physique.

DÉPLACEMENTS DES CORPS SOLIDES NATURELS. — Une théorie peut être appréciée à deux points de vue : au point de vue de sa valeur en tant que système logique et au point de vue de sa concordance avec une catégorie de faits physiques.

Nous croyons avoir montré que les Géométries non-euclidiennes constituent des systèmes logiques aussi rigoureux que la Géométrie euclidienne.

Existe-t-il des faits physiques dont la Géométrie soit la théorie ?

Nous avons vu que la Géométrie était la théorie des déplacements sans déformation.

En tant que notion idéale, un déplacement sans déformation peut être légitimement conçu comme euclidien ou non-euclidien à notre gré.

C'est là un siège commode pour l'analyste. Mais une notion subjective a toujours un *substratum* objectif et empirique, et celle de déplacement sans déformation n'a pas été conçue sans germe extérieur par le cerveau humain.

En fait, la notion de déplacement sans déformation n'est pas autre chose que la notion empirique du déplacement des corps solides, notion qui résulte directement, dans tout esprit humain, de l'observation inconsciente du monde extérieur et qui persiste telle quelle chez l'ignorant, tandis qu'elle se transforme chez le savant en notion purement abstraite, ne correspondant qu'approximativement aux faits physiques, tenus par lui pour plus compliqués.

Nous voici donc conduits à cette question un peu bizarre : « Les corps solides naturels sont-ils ou non-euclidiens? »

M. Poincaré [1] nous donne le moyen de nous débarrasser de cette question par les considérations suivantes :

« La Géométrie euclidienne ...... serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur, puisque nous savons qu'il n'existe pas de solides rigoureusement invariables.

« Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des faits expérimentaux.

« Ce sont donc des *conventions*; notre *choix* est guidé par des faits expérimentaux, mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction ».

Nous nous permettrons de présenter une objection à cette manière de voir les choses.

Les propriétés réelles des déplacements des corps solides naturels dépendent de multiples circonstances physiques : température, pression, usure, etc. Mais, quelque nombreuses que soient les causes susceptibles d'influer sur les propriétés des déplacements, on peut concevoir qu'elles aient été déterminées, et par suite, parvenir à l'idée des déplacements qui auraient lieu, si les causes perturbatrices n'agissaient pas.

Bref, on pourra distinguer les circonstances *topogènes* des circonstances *hylogènes*, suivant l'expression d'Helmholtz, et il sera permis de parler des propriétés *géométriques* des corps solides naturels, pourvu que la manière dont se déplacent ces corps soit indépendante de leur substance. Quant aux effets dus soit à l'usure, soit aux variations de la température et de la pression, on peut concevoir la possibilité de s'en garantir ou d'en tenir compte, puisqu'ils sont dus à des causes non *topogènes*.

Toute détermination expérimentale des lois d'une catégorie de phénomènes serait impossible, si on ne pouvait se soustraire, dans une large mesure, à l'influence des causes indépendantes de celles que l'on étudie, ou bien calculer, avec une approximation connue, les effets de ces dernières.

---

(1) Poincaré. *Revue générale des Sciences*, p. 769-774. 1891.

L'existence de la pesanteur et sa variation avec le lieu empêchent-elles la détermination des lois des forces électriques et, ces lois acquises, suppriment-elles la possibilité de les corriger au moyen d'expériences plus précises, comme le fait s'est produit dans certaines branches de la science ?

Cette possibilité de déterminer les lois de chaque catégorie de phénomènes tient précisément à notre manière de classer les phénomènes par catégories dont chacune correspond à des causes indépendantes des autres.

Nous croyons donc qu'il n'y a aucune absurdité à se demander si les corps solides sont euclidiens ou non-euclidiens.

C'est cette question et pas d'autre qui est en jeu, lorsqu'on suppose que des mesures astronomiques pourraient venir contredire les formules euclidiennes.

Imaginons, par exemple, qu'on ait pu connaître (par quels procédés de communications interplanétaires ?...) le résultat de la mesure directe d'un angle astronomique ayant son sommet sur Mars et que ce résultat différât de la valeur calculée d'autre part par les formules euclidiennes sur des données résultant de mesures faites par les habitants de la Terre.

Supposons que l'on ait d'autre part d'excellentes raisons pour écarter toute explication relative à la propagation de la lumière ou à un ordre de faits analogues.

Devra-t-on conclure que *l'espace* n'est pas euclidien ?

Nullement, l'espace n'a pas de propriétés intrinsèques.

La seule conclusion compatible avec le bon sens est que les instruments goniométriques employés, ou plutôt les instruments qui ont servi à leur graduation, ne satisfont pas aux axiomes euclidiens.

S'ils satisfont à tous ces axiomes, sauf à celui des parallèles, tous les instruments goniométriques, construits indépendamment les uns des autres en des points quelconques de l'espace, doivent donner le même résultat si on s'en sert pour la mesure d'un même angle.

Cela tient aux propriétés suivantes :

1° L'angle 2π est le même en tous les points de l'espace ;

2° Deux grandeurs superposables en un lieu de l'espace le sont en un lieu quelconque et quel que soit le trajet employé pour chacune d'elles (propriété des déplacements de constituer un groupe d'opérations, ce qui est nécessaire pour établir convenablement l'idée d'égalité) ;

3° Le tout ne peut pas être égal à la partie[1] (restriction réalisée par l'existence d'un invariant relatif à deux points et entraînant cette conséquence que, si $a = b, \frac{1}{n} a = \frac{1}{n} b$).

Si l'on admet ces diverses hypothèses, l'on devra conclure de l'expérience imaginaire relatée plus haut que les déplacements des corps solides sont non-euclidiens, et l'on voit clairement que, si cette conclusion peut être tirée sans qu'aucun corps solide soit transporté de Mars sur la Terre ou inversement, c'est en raison des propriétés admises pour ce déplacement en dehors du postulat des parallèles, propriétés dont les conséquences sont particulièrement importantes en ce qui concerne la mesure des angles.

On peut d'ailleurs se poser bien d'autres questions sur la vraie nature des déplacements des corps solides, car le postulat des parallèles n'est pas le seul axiome qu'on puisse abandonner sans compromettre l'ordonnance logique de la géométrie. On lira avec intérêt, sur cette question des axiomes indépendants, le remarquable mémoire de M. Hilbert [2].

Mais, qu'il s'agisse du postulat des parallèles ou de tout autre axiome, ce n'est pas dans les propriétés des corps solides naturels que nous voyons le principal intérêt de la question relative à la portée physique de la géométrie.

La Géométrie et les Sciences physiques. — En fait, la Géométrie domine toute notre analyse de la nature par suite du fait que tout phénomène est indépendant du lieu où il se produit; ou, d'une manière plus précise, qu'on peut, sans rien changer à un phénomène, opérer un déplacement sans déformation de l'ensemble des corps qu'il intéresse, toutes autres circonstances (la température notamment) restant les mêmes.

Il en résulte que les conséquences d'une modification aux axiomes de la géométrie peuvent s'étendre à des faits d'un ordre tout différent de celui des propriétés des corps solides.

---

(1) Poincaré. *Revue de métaphysique et de morale*, 1899.

(2) Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899 ; traduit en français par M. Laugel. Gauthier-Villars, Paris, 1900.

La Mécanique, c'est-à-dire la science du mouvement, est essentiellement relative aux déplacements sans déformation, comme si un fait ne nous intéressait qu'en ce qu'il trouble la configuration d'un ensemble de corps ; les énergies potentielles relatives aux diverses forces naturelles s'expriment en fonction des positions relatives des corps mis en jeu (ou, ce qui revient au même, en fonction des distances des points de ces divers corps, car la distance de deux points est le seul invariant indépendant que présente le groupe des déplacements).

Pour pouvoir déterminer clairement le rôle de la Géométrie dans la Mécanique, il faudrait qu'on fût parvenu d'abord à donner aux fondements de cette dernière science une structure logique plus satisfaisante, ensuite à distinguer, dans ces fondements, la partie rationnelle de la partie expérimentale. Ces deux résultats ne paraissent pas près d'être obtenus.

Précisément en raison de cette obscurité, qui s'étend aux principes de la science astronomique, une des principales tributaires de la Mécanique, on peut regarder comme possible l'éventualité qu'une modification de la notion de distance ait pour effet de simplifier certaines lois de l'univers. Cette éventualité est fort bien acceptée par notre esprit, lorsqu'on songe à l'origine précaire de la notion de distance.

Si elle venait à se produire, il n'y a aucun doute qu'on s'empresserait d'adopter cette modification féconde dans les question où elle aurait sa raison d'être.

Cette adoption n'aurait d'ailleurs nullement pour conséquence la disparition de la Géométrie euclidienne, celle-ci conservant tout son intérêt dans le domaine où elle continuerait à être exacte : la Mécanique des corps indéformables n'a-t-elle pas, dans l'état actuel de la science, sa place à côté de la théorie de l'élasticité, qui contredit la réalité de pareils corps ?

Nous croyons donc qu'un examen du rôle joué dans la Mécanique par les principes de la Géométrie présente le plus grand intérêt.

L'édification d'une statique non-euclidienne a été tentée par M. Andrade [1] ; parmi les résultats obtenus, nous citerons

---

[1] ANDRADE. *Leçons de mécanique physique*. Société d'éditions scientifiques, Paris, 1898.

l'impossibilité paradoxale de réaliser le mécanisme particulièrement simple, constitué par un fil flexible et inextensible. Mais on doit remarquer qu'une telle théorie suppose la généralisation préalable des notions fondamentales : force, équilibre, travail, et que la manière dont peut se faire cette généralisation est en partie arbitraire.

Ces quelques observations, quoique fort imprécises, suffisent à montrer que la portée des questions relatives aux déplacements sans déformation s'étend bien au delà des propriétés des corps solides.

L'INFINI PHYSIQUE. — Nous avons vu que l'idée de l'infini géométrique était essentiellement relative à la notion de distance et pouvait disparaître moyennant certains systèmes de détermination métrique.

De même que nous nous sommes demandé s'il existe une géométrie physique, nous pouvons nous demander si l'idée de l'infini correspond à un fait physique.

On imagine généralement que, si l'on parcourait indéfiniment une ligne droite, on traverserait indéfiniment des mondes plus ou moins semblables à celui dont nous faisons partie.

Il semblerait dès lors que cette idée de l'infini cosmique doive disparaître en même temps que celle de l'infini géométrique.

Cette façon de voir les choses résulte, suivant nous, d'un faux point de vue :

Il est évident d'abord que des considérations sur la notion de distance ne peuvent avoir aucune conséquence pour nos connaissances cosmiques. Celles-ci doivent donc être examinées d'une manière tout à fait indépendante.

Nous avons déjà observé que, dans la science mathématique, les expressions telles que : *infini*, *infiniment petit*, *croissant ou décroissant indéfiniment*, ont des significations rigoureusement et positivement définies, liées à l'importante notion de limite, et qu'elles ne peuvent pas correspondre à des propriétés intrinsèques d'un concept objectif.

L'idée de l'infini cosmique, tout à fait analogue, réside dans celle de la persistance de nos perceptions familières dans un voyage supposé indéfiniment continué dans l'espace.

Cette idée ne repose évidemment sur aucun fait expérimental.

Une notion n'étant plus valable en dehors du domaine de l'observation qui lui a donné naissance, nous ne croyons pas que l'on puisse légitimement donner au mot infini une valeur physique qu'il ne saurait avoir.

La conception de l'univers comme la répétition indéfinie de ce qu'une expérience restreinte nous a fait connaître nous paraît aussi inacceptable que celle qui consisterait à croire que dans un examen des corps solides qui porterait sur des particules de plus en plus petites, persisteraient les propriétés de continuité, d'élasticité, de couleur, etc., relatives à l'observation courante.

Le *prolongement* de nos images représentatives au delà du domaine empirique est une opération familière à l'esprit humain ; mais on sent tout l'arbitraire de ces généralisations trans-naturelles, qui sont, je crois, les procédés de création des idées métaphysiques.

V

La Ligne droite.

Définition de la ligne droite. — On a souvent confondu la *définition* de la ligne droite avec l'énoncé de ses propriétés fondamentales, c'est-à-dire de celles d'où se déduisent rationnellement toutes les autres.

Cette confusion est une erreur.

Nous montrerons en effet qu'on peut créer des géométries en prenant pour base des systèmes de lignes choisis arbitrairement dans une large mesure, auxquels nous attribuerons les propriétés du système des lignes droites.

A la base de toute science rationnelle se trouvent des notions primordiales, qu'il est impossible de définir autrement que par le procédé consistant à montrer un objet pour indiquer la signification du mot qu'il représente.

Pour la Géométrie, si l'on conserve les procédés habituels de démonstration des premiers théorèmes, la notion primordiale est évidemment celle du déplacement sans déformation.

On peut bien en énoncer les propriétés fondamentales, comme a cru le faire Helmholtz, comme l'a fait Sophus Lie ; mais cela ne suffit pas à la *définir*. Il existe en effet une infinité de groupes de transformations ponctuelles de l'espace jouissant des mêmes propriétés que le groupe des déplacements. Chacun de ces groupes est ce que devient le groupe des déplacements dans une transformation ponctuelle univoque de l'espace.

Les lignes droites sont alors transformées en d'autres lignes qui jouissent de toutes leurs propriétés.

Toutes les propositions de la Géométrie restent exactes, à condition de représenter par les mots : égalité, ligne droite, plan, etc., des choses autres que celles que ces mots représentent habituellement.

Une fois acquise la notion primordiale de déplacement sans déformation, la ligne droite peut être *définie*, ou plutôt la notion de ligne droite est comprise dans celle de déplacement sans déformation.

En effet une des propriétés des déplacements sans déformation consiste en ce que, lorsqu'on maintient fixes deux points d'une figure, tous les points d'une certaine ligne passant par ces deux points restent également fixes.

On obtient ainsi des lignes déterminées par deux points, par suite dépendant de quatre paramètres : ce sont les lignes droites.

Au moyen d'un des groupes de transformations dont il vient d'être question, nous obtiendrons de la même manière des lignes déterminées également par deux points, qui ne seraient pas des lignes droites.

Détermination de la ligne droite par deux points. — On vient de voir que la propriété d'être déterminée par deux points ne peut pas constituer une définition de la ligne droite. Cela résulte encore plus clairement, si cela était nécessaire, de la signification du mot « déterminé ».

Une ligne droite est déterminée par la connaissance de deux de ses points et *par le fait d'être une ligne droite*, c'est-à-dire que deux points la déterminent *parmi les lignes droites*.

Le fait pour une ligne d'être déterminée par deux points ne constitue évidemment pas une propriété de cette ligne mais bien une propriété d'un système de lignes, dont elle fait partie.

Mais si le fait d'être déterminée par deux points ne peut pas être une définition de la ligne droite, il peut, dans une certaine manière d'édifier la Géométrie, constituer une propriété fondamentale, autrement dit un axiome.

On sait que la Géométrie projective peut être établie indépendamment de la Géométrie métrique, celle-ci venant alors la compléter par l'introduction du plan et du cercle imaginaire de l'infini. Mais, tandis que les déplacements sans déformation ont paru constituer une notion si naturelle qu'on a couramment appliqué leurs propriétés sans éprouver le besoin de les énoncer, les transformations projectives au contraire sont loin de se prêter facilement à une conception intuitive, et on ne peut guère les placer en qualité de notion fondamentale à la base de la Géométrie.

Il faut alors recourir, pour ce rôle, à la ligne droite.

Dans ces conditions, sans se demander quelle est l'origine empirique de la notion de ligne droite, on la prendra comme notion fondamentale, et on devra alors commencer par énoncer ses propriétés fondamentales.

Observons encore, et pour ne plus y revenir, qu'une transformation ponctuelle de l'espace transformerait le système des lignes droites en un système jouissant des mêmes propriétés et par conséquent susceptible de servir de base à une géométrie, ou plutôt à un ensemble de faits susceptibles d'être exprimés par les propositions de la géométrie projective (puisqu'il ne s'agit, pour le moment, que de cette dernière).

La première propriété fondamentale est que les lignes droites constituent un système à quatre paramètres. L'on doit ajouter, si l'on adopte l'hypothèse admise dans cette étude (§ III), que la condition de passer par deux points *quelconques* donne toujours lieu à une détermination et à une seule.

Cette propriété des lignes droites ne constitue pas une base suffisante pour la géométrie projective. Il faut en outre qu'il existe des plans, c'est-à-dire des surfaces à trois paramètres telles que, si une ligne droite a deux de ses points sur l'une d'elles, elle y soit contenue tout entière.

L'examen de la question montre facilement que l'existence des plans est liée à la propriété suivante des lignes droites :

Si trois lignes droites se rencontrent deux à deux, et qu'une quatrième rencontre les deux premières, elle rencontre aussi la troisième.

La recherche de l'expression analytique de cette condition constitue une étude des plus intéressantes, qui se rattache aux travaux de M. Kœnigs sur les équations différentielles exprimant la condition de rencontre de deux lignes infiniment voisines faisant partie d'un système à un certain nombre de paramètres.

Ce n'est pas ici le lieu de pénétrer plus avant dans cette question.

Remarquons enfin que l'on peut rattacher la détermination d'une ligne droite par deux de ses points à la notion de distance, qui, elle, dépend incontestablement de celle de déplacement sans déformation.

On peut en effet construire une ligne droite déterminée par deux de ses points A et B, en effectuant uniquement des mesures de distance. Il suffit pour cela d'observer que, sauf sur la droite AB, il n'existe pas de point C qui soit le seul à être distant des points A et B des longueurs AC et BC.

On peut, au moyen d'une propriété analogue, déterminer les points d'un plan dont on connaît trois points.

Lignes minimales. — Il faut citer, parmi les propriétés de la ligne droite que l'on a voulu utiliser comme définition, celle d'être le plus court chemin d'un point à un autre. (On remarquera que cette propriété occupe une place à part dans la géométrie et n'est pas utilisée dans les démonstrations).

Cette propriété est démontrable, puisqu'il suffit d'appliquer le calcul des variations à l'intégrale qui représente la longueur d'une courbe, et cela en prenant, pour l'élément linéaire, l'expression euclidienne ou non-euclidienne.

Dans l'ignorance où je suis d'une démonstration synthétique, qui doit probablement exister, j'en esquisserai une dans le but surtout de montrer les éléments de la question.

Il suffit évidemment de prouver que, dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres et, en abaissant du sommet une perpendiculaire sur le côté opposé, on voit facilement qu'il suffit de démontrer que la perpendiculaire est plus courte que les obliques.

Si l'on mène à une droite Δ une perpendiculaire issue d'un point extérieur O, et deux obliques issues du même point et aboutissant à des points équidistants du pied de la perpendiculaire, ces obliques seront égales comme côtés homologues de deux triangles égaux.

En outre, si on s'éloigne d'une manière continue de la perpendiculaire, les longueurs des obliques varient dans un sens permanent. Car, sans cela, on rencontrerait deux obliques égales, et en joignant le point O au milieu de la distance de leur pied, on formerait deux triangles, qui seraient égaux comme ayant leurs côtés égaux deux à deux. De l'égalité des angles homologues, il résulterait qu'on aurait construit une seconde perpendiculaire, ce qui est contraire à un théorème connu.

Il résulte de là que la longueur de la perpendiculaire est minimum ou maximum, ou bien que toutes les droites issues du point O et arrêtées à la droite Δ sont égales et sont des perpendiculaires à cette dernière.

Pour décider entre ces trois cas, il est nécessaire de faire intervenir les propriétés particulières des trois Géométries.

Cette étude étant déjà fort longue, nous laisserons au lecteur le soin de terminer la démonstration, en faisant observer toutefois qu'en Géométrie sphérique, il faut préciser que la propriété du minimum appartient au plus petit des deux segments déterminés par deux points sur une droite.

Rectilinéarité du rayon lumineux. — Nous avons vu qu'une ligne droite peut être déterminée matériellement comme axe de rotation d'un corps solide, ou encore au moyen de mesures directes de distances, c'est-à-dire, dans les deux méthodes, en utilisant les propriétés des corps solides.

Pratiquement, on emploie souvent la propriété des rayons lumineux d'être rectilignes, et l'on a parfois voulu voir dans cette propriété la base de l'idée de ligne droite.

La rectilinéarité du rayon lumineux est, comme l'observe Helmholtz, un fait physiquement démontrable.

Si un rayon lumineux issu d'un point A passe par un point B, sa rectilinéarité se vérifiera en constatant qu'il continue à passer par ce dernier point, lorsqu'on fait tourner autour de la droite AB l'appareil solide qui le produit. La ligne droite, dans cette expérience, est déterminée, ainsi qu'il convient, comme axe de rotation d'un corps solide.

Au point de vue rationnel, la rectilinéarité d'un rayon lumineux dans un milieu homogène tient évidemment aux deux propositions suivantes :

1° Un milieu est dit homogène, lorsque les propriétés physiques en un point de l'espace situé dans le milieu, ne changent pas dans tout déplacement sans déformation du milieu;

2° Les lois physiques sont indépendantes du lieu, c'est-à-dire sont invariantes par rapport aux déplacements sans déformation.

A propos de l'homogénéité, nous ferons une observation.

On dit quelquefois que l'*espace* est homogène.

Cette façon de s'exprimer est évidemment défectueuse, si l'on prend le mot « espace » dans le sens très-restreint où nous avons dû l'employer dans une question qui exigeait une précision absolue des termes. Mais il n'y a pas grand inconvénient, à condition de ne pas se laisser duper par les mots, à s'exprimer comme si les propositions géométriques représentaient les propriétés d'une entité, qui serait l'espace.

Dans cette manière de parler, purement métaphorique, l'homogénéité de l'espace n'exprime pas une propriété objective, mais est seulement une constatation résultant de la définition de l'homogénéité.

L'homogénéité non-euclidienne ne constitue pas évidemment la même propriété physique que l'homogénéité euclidienne, et c'est une des raisons pour lesquelles nous disions que les principes de la Géométrie ont une portée physique.

Dans tous les cas, les lignes droites sont les mêmes lignes dans les trois Géométries, et c'est pour cela qu'on ne doit pas parler de la ligne droite *euclidienne*; l'incorrection est du même ordre que celle de l'expression : l'espace euclidien.

Comme l'observe Helmholtz, il est probable que, si l'on était conduit à modifier certaines lois physiques en raison de faits non-euclidiens, le rayon lumineux n'en conserverait pas moins la propriété de suivre le plus court chemin et, par suite, dans les milieux homogènes (au nouveau sens que prendrait ce mot), de parcourir des lignes droites.

VI

Qu'est-ce que la Géométrie?

Le présent article allait être terminé, lorsqu'a paru le numéro de l'*Enseignement mathématique*, contenant la lumineuse vue d'ensemble de M. H. Laurent sur les fondements de la Géométrie. Sa lecture me fait ajouter ce paragraphe à un article déjà long.

Il est un point, beaucoup plus psychologique que mathématique d'ailleurs, sur lequel des géomètres éminents s'expliquent au moyen d'expressions que je ne puis comprendre, c'est celui qui est relatif à la nature même de la Géométrie.

Il s'agit au fond d'une question de mots, notamment des significations différentes que l'on peut donner à certaines expressions telles que : Géométrie, convention, science expérimentale.

Suivant M. H. Laurent, la Géométrie serait un langage, un système d'analyse ayant pour objet de *classer*, *coordonner*, *expliquer les phénomèmes observés dans le domaine de la Géométrie*, c'est-à-dire *les faits géométriques*, par conséquent, choisir entre les types possibles de géométries serait *une question dénuée de sens*.

On a dit, dans le même courant d'idées, que, parmi les Géométries, on avait simplement à se préoccuper de choisir *la plus commode*, et encore « que les axiomes de la Géométrie sont *des conventions* ».

Enfin, nous citerons les deux affirmations contradictoires :

« Il faut se résigner à faire de la Géométrie une science physique et expérimentale [1] ».

« La Géométrie n'est pas une science expérimentale [2] ».

---

[1] H. LAURENT. *Les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la Géometrie*, Collection Scientia, Naud, 1902, Paris.

[2] H. POINCARÉ. *Sur l'ouvrage de M. Hilbert Grundlagen der Geometrie*, Bulletin des sciences mathématiques, 1902, Paris.

Pour que la Géométrie fût un simple casier de coordination pour les faits géométriques (il ne s'agit pas, bien entendu, du système d'analyse qui porte le nom incorrect de Géométrie analytique au lieu de s'appeler, comme il conviendrait, analyse géométrique), il faudrait que ceux-ci existassent en dehors d'elle. Or c'est ce qui n'est pas, et la preuve la plus directe, c'est que M. H. Laurent, pour qualifier leur domaine, n'a pas trouvé d'autre épithète que le mot « géométrique ».

Par cela seul que M. H. Laurent sait quels sont les faits qu'il qualifie de géométriques, il a déjà fait choix d'une géométrie : en particulier, la science de l'égalité euclidienne ne peut pas se confondre avec celle de l'égalité lobatchewskienne.

Et d'ailleurs, qu'on essaie de préciser l'idée de la géométrie jouant le rôle d'un langage par un exemple concret en donnant les représentations (?) d'un fait *géométrique* dans des systèmes différents de géométries !

La Géométrie euclidienne n'est pas *la plus commode* (qu'on essaie d'exprimer pour quel objet), mais bien celle qui étudie des faits d'une catégorie particulière, constitués (comme tout fait) par l'association de notions déterminées, parmi lesquelles certaines se rapportent à des relations possibles entre les autres ; ces notions sont celles de point, ligne, surface, intersection, contact, droites, plan, etc., sans oublier l'importante notion de l'égalité géométrique.

Ces notions (et il en est, par suite, de même des faits géométriques) sont précisément caractérisés par la propriété d'être indépendantes de tout déplacement sans déformation.

On voit donc que, en changeant l'idée de déplacement sans déformation, ce n'est pas seulement un système d'analyse que l'on change, mais bien les faits eux-mêmes qu'il s'agit d'étudier.

Les axiomes de la Géométrie, c'est-à-dire les propriétés fondamentales des notions qui constituent l'objet de cette science sont-ils conventionnels ?

Si l'on entend exprimer par là que l'esprit humain est libre de construire des édifices logiques sur des bases très différentes entre elles, c'est une naïveté, applicable à toute science rationnelle : à la Mécanique rationnelle et aux diverses branches de la Physique mathématique, par exemple.

Si l'on veut dire que l'on peut arbitrairement changer les axiomes de la Géométrie, tout en conservant le nom de cette science, j'estime qu'il n'est pas raisonnable de prendre le mot « Géométrie » dans cette acception.

L'esprit humain ne crée une idée, un mot que poussé par un mobile, un *intérêt*. Supprimer le mobile et conserver le mot est absurde, antinaturel. Or l'intérêt spécial qui caractérise la Géométrie disparaît si l'on remplace certains axiomes, c'est-à-dire certaines notions, par d'autres.

Au surplus, qu'on essaie d'expliquer d'une manière vraiment positive ce que l'on peut entendre par cette proposition : les principes de la Géométrie sont des conventions.

Il reste à examiner si la Géométrie est une science physique, une science expérimentale.

Ce qui nous importe n'est pas de savoir comment on doit s'exprimer sur ce point, mais bien comment on doit classer la Géométrie parmi les autres sciences.

Je dis qu'elle ne se différencie pas, au point de vue qui nous occupe, de la Mécanique rationnelle et des diverses branches de la Physique mathématique.

Je m'élève tout d'abord contre la distinction faite souvent entre les *êtres de raison* et les objets réels.

En somme, ce qu'atteint notre connaissance, ce sont toujours, des idées, des images : l'idée du corps solide indéformable n'est pas moins *réelle* (?) que celle du corps solide élastique, elle appartient à un domaine d'observation moins attentive, voilà tout.

L'Optique élémentaire est tout aussi physique, expérimentale — si l'on veut employer ces expressions — que l'Optique de Fresnel et celle de Maxwell.

Le *point matériel* de la Mécanique rationnelle n'est pas plus un *être de raison* qu'un objet quelconque.

Les notions qui sont à la base des sciences rationnelles sont soumises aux mêmes lois de formation que celles de nos notions que nous qualifierions le plus volontiers de réelles — si ce mot pouvait avoir un sens dans l'espèce. Elles ne résultent pas d'une opération d'abstraction, elles sont simplement le résultat du premier regard maladroit encore que nous jetons sur la nature, et elles constituent les matériaux avec lesquels notre esprit construit les idées compliquées qui devront s'accorder avec des expériences plus précises,

Cela admis, on ne voit pas en quoi la théorie de l'égalité des longueurs, des surfaces et des volumes indéformables est d'une autre nature que la théorie élémentaire des actions électriques, l'Optique élémentaire ou toute autre science déductive ayant des principes provenant directement ou indirectement de l'expérience.

Enfin la Gométrie reste justiciable de l'expérience.

La mesure des objets sensiblement indéformables a suffisamment intéressé l'humanité pour donner lieu à la science importante qu'est la Géométrie élémentaire et il est très remarquable que les lois relativement récentes de la Mécanique et de la Physique soient intimement liées à l'idée du déplacement sans déformation, laquelle intervient dans ces lois par la distance, représentant numérique de cette idée comme étant le seul invariant indépendant relatif au groupe des déplacements.

Il ne saurait être indifférent, au point de vue des conséquences physiques, que la distance qui figure dans les lois de la Dynamique ou dans l'expression de l'énergie potentielle due à des forces cosmiques, électriques, électrodynamiques, etc., soit euclidienne ou non-euclidienne.

Or l'unité de plus en plus probable de la conception que l'humanité est appelée à se faire de la Nature nous fait penser que des modifications fondamentales dans la Mécanique entraîneraient des modifications concordantes dans la Géométrie.

A vrai dire, une hypothèse reste à envisager, c'est celle suivant laquelle le rôle essentiel joué par la mesure des distances dans la plupart des branches de la science résulterait d'un phénomène purement subjectif, c'est-à-dire que l'esprit humain, hypnotisé par l'idée du corps solide, en aurait fait l'élément de toute son analyse de la nature et le repère auquel il rapporte toutes les modifications d'ordre mécanique

Mais alors on devrait pouvoir, par de simples définitions de mots, déduire rationnellement de nos conceptions géométriques les notions et les lois fondamentales de la Mécanique, qui d'absolues deviendraient relatives, j'entends anthropomorphiques.

Notre cerveau, libéré de sa polarisation vers l'idée d'indéformabilité, pourrait alors établir une Mécanique qui conserverait sans doute les notions de point et de position, mais qui ne serait pas liée à l'idée exclusive de distance.

Pure hypothèse d'ailleurs, que n'encourage guère l'insuccès des tentatives faites jusqu'ici pour réduire à un clair assemblage ce système à liaisons surabondantes que constituent les principes de la Mécanique, hypothèse très séduisante pour l'analyste en ce qu'elle réduirait le nombre des principes échappant à la pure logique, encore plus séduisante pour le philosophe positif, qui verrait ainsi se dissiper une bonne partie du caractère mystérieux présenté par certaines lois fondamentales de la Mécanique et de la Physique, pour lesquelles aucune explication ne se présente à notre esprit.

G. Combebiac (Limoges.)