IV Géométrie physique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?

(*Suite*).

IV

Géométrie physique.

Déplacements des corps solides naturels. — Une théorie peut être appréciée à deux points de vue : au point de vue de sa valeur en tant que système logique et au point de vue de sa concordance avec une catégorie de faits physiques.

Nous croyons avoir montré que les Géométries non-euclidiennes constituent des systèmes logiques aussi rigoureux que la Géométrie euclidienne.

Existe-t-il des faits physiques dont la Géométrie soit la théorie ?

Nous avons vu que la Géométrie était la théorie des déplacements sans déformation.

En tant que notion idéale, un déplacement sans déformation peut être légitimement conçu comme euclidien ou non-euclidien à notre gré.

C'est là un siège commode pour l'analyste. Mais une notion subjective a toujours un *substratum* objectif et empirique, et celle de déplacement sans déformation n'a pas été conçue sans germe extérieur par le cerveau humain.

En fait, la notion de déplacement sans déformation n'est pas autre chose que la notion empirique du déplacement des corps solides, notion qui résulte directement, dans tout esprit humain, de l'observation inconsciente du monde extérieur et qui persiste telle quelle chez l'ignorant, tandis qu'elle se transforme chez le savant en notion purement abstraite, ne correspondant qu'approximativement aux faits physiques, tenus par lui pour plus compliqués.

Nous voici donc conduits à cette question un peu bizarre : « Les corps solides naturels sont-ils ou non-euclidiens? »

M. Poincaré [1] nous donne le moyen de nous débarrasser de cette question par les considérations suivantes :

« La Géométrie euclidienne ...... serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur, puisque nous savons qu'il n'existe pas de solides rigoureusement invariables.

« Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des faits expérimentaux.

« Ce sont donc des *conventions*; notre *choix* est guidé par des faits expérimentaux, mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction ».

Nous nous permettrons de présenter une objection à cette manière de voir les choses.

Les propriétés réelles des déplacements des corps solides naturels dépendent de multiples circonstances physiques : température, pression, usure, etc. Mais, quelque nombreuses que soient les causes susceptibles d'influer sur les propriétés des déplacements, on peut concevoir qu'elles aient été déterminées, et par suite, parvenir à l'idée des déplacements qui auraient lieu, si les causes perturbatrices n'agissaient pas.

Bref, on pourra distinguer les circonstances *topogènes* des circonstances *hylogènes*, suivant l'expression d'Helmholtz, et il sera permis de parler des propriétés *géométriques* des corps solides naturels, pourvu que la manière dont se déplacent ces corps soit indépendante de leur substance. Quant aux effets dus soit à l'usure, soit aux variations de la température et de la pression, on peut concevoir la possibilité de s'en garantir ou d'en tenir compte, puisqu'ils sont dus à des causes non *topogènes*.

Toute détermination expérimentale des lois d'une catégorie de phénomènes serait impossible, si on ne pouvait se soustraire, dans une large mesure, à l'influence des causes indépendantes de celles que l'on étudie, ou bien calculer, avec une approximation connue, les effets de ces dernières.

---

[1] POINCARÉ. *Revue générale des Sciences*, p. 769-774. 1891.

L'existence de la pesanteur et sa variation avec le lieu empêchent-elles la détermination des lois des forces électriques et, ces lois acquises, suppriment-elles la possibilité de les corriger au moyen d'expériences plus précises, comme le fait s'est produit dans certaines branches de la science ?

Cette possibilité de déterminer les lois de chaque catégorie de phénomènes tient précisément à notre manière de classer les phénomènes par catégories dont chacune correspond à des causes indépendantes des autres.

Nous croyons donc qu'il n'y a aucune absurdité à se demander si les corps solides sont euclidiens ou non-euclidiens.

C'est cette question et pas d'autre qui est en jeu, lorsqu'on suppose que des mesures astronomiques pourraient venir contredire les formules euclidiennes.

Imaginons, par exemple, qu'on ait pu connaître (par quels procédés de communications interplanétaires ?...) le résultat de la mesure directe d'un angle astronomique ayant son sommet sur Mars et que ce résultat différât de la valeur calculée d'autre part par les formules euclidiennes sur des données résultant de mesures faites par les habitants de la Terre.

Supposons que l'on ait d'autre part d'excellentes raisons pour écarter toute explication relative à la propagation de la lumière ou à un ordre de faits analogues.

Devra-t-on conclure que *l'espace* n'est pas euclidien ?

Nullement, l'espace n'a pas de propriétés intrinsèques.

La seule conclusion compatible avec le bon sens est que les instruments goniométriques employés, ou plutôt les instruments qui ont servi à leur graduation, ne satisfont pas aux axiomes euclidiens.

S'ils satisfont à tous ces axiomes, sauf à celui des parallèles, tous les instruments goniométriques, construits indépendamment les uns des autres en des points quelconques de l'espace, doivent donner le même résultat si on s'en sert pour la mesure d'un même angle.

Cela tient aux propriétés suivantes :

1° L'angle 2π est le même en tous les points de l'espace ;

2° Deux grandeurs superposables en un lieu de l'espace le sont en un lieu quelconque et quel que soit le trajet employé pour chacune d'elles (propriété des déplacements de constituer un groupe d'opérations, ce qui est nécessaire pour établir convenablement l'idée d'égalité) ;

3° Le tout ne peut pas être égal à la partie [1] (restriction réalisée par l'existence d'un invariant relatif à deux points et entraînant cette conséquence que, si $a = b$, $\frac{1}{n} a = \frac{1}{n} b$).

Si l'on admet ces diverses hypothèses, l'on devra conclure de l'expérience imaginaire relatée plus haut que les déplacements des corps solides sont non-euclidiens, et l'on voit clairement que, si cette conclusion peut être tirée sans qu'aucun corps solide soit transporté de Mars sur la Terre ou inversement, c'est en raison des propriétés admises pour ce déplacement en dehors du postulat des parallèles, propriétés dont les conséquences sont particulièrement importantes en ce qui concerne la mesure des angles.

On peut d'ailleurs se poser bien d'autres questions sur la vraie nature des déplacements des corps solides, car le postulat des parallèles n'est pas le seul axiome qu'on puisse abandonner sans compromettre l'ordonnance logique de la géométrie. On lira avec intérêt, sur cette question des axiomes indépendants, le remarquable mémoire de M. Hilbert [2].

Mais, qu'il s'agisse du postulat des parallèles ou de tout autre axiome, ce n'est pas dans les propriétés des corps solides naturels que nous voyons le principal intérêt de la question relative à la portée physique de la géométrie.

La Géométrie et les Sciences physiques. — En fait, la Géométrie domine toute notre analyse de la nature par suite du fait que tout phénomène est indépendant du lieu où il se produit ; ou, d'une manière plus précise, qu'on peut, sans rien changer à un phénomène, opérer un déplacement sans déformation de l'ensemble des corps qu'il intéresse, toutes autres circonstances (la température notamment) restant les mêmes.

Il en résulte que les conséquences d'une modification aux axiomes de la géométrie peuvent s'étendre à des faits d'un ordre tout différent de celui des propriétés des corps solides.

---

(1) Poincaré. *Revue de métaphysique et de morale*, 1899.

(2) Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899 ; traduit en français par M. Laugel. Gauthier-Villars, Paris, 1900.

La Mécanique, c'est-à-dire la science du mouvement, est essentiellement relative aux déplacements sans déformation, comme si un fait ne nous intéressait qu'en ce qu'il trouble la configuration d'un ensemble de corps ; les énergies potentielles relatives aux diverses forces naturelles s'expriment en fonction des positions relatives des corps mis en jeu (ou, ce qui revient au même, en fonction des distances des points de ces divers corps, car la distance de deux points est le seul invariant indépendant que présente le groupe des déplacements).

Pour pouvoir déterminer clairement le rôle de la Géométrie dans la Mécanique, il faudrait qu'on fût parvenu d'abord à donner aux fondements de cette dernière science une structure logique plus satisfaisante, ensuite à distinguer, dans ces fondements, la partie rationnelle de la partie expérimentale. Ces deux résultats ne paraissent pas près d'être obtenus.

Précisément en raison de cette obscurité, qui s'étend aux principes de la science astronomique, une des principales tributaires de la Mécanique, on peut regarder comme possible l'éventualité qu'une modification de la notion de distance ait pour effet de simplifier certaines lois de l'univers. Cette éventualité est fort bien acceptée par notre esprit, lorsqu'on songe à l'origine précaire de la notion de distance.

Si elle venait à se produire, il n'y a aucun doute qu'on s'empresserait d'adopter cette modification féconde dans les question où elle aurait sa raison d'être.

Cette adoption n'aurait d'ailleurs nullement pour conséquence la disparition de la Géométrie euclidienne, celle-ci conservant tout son intérêt dans le domaine où elle continuerait à être exacte : la Mécanique des corps indéformables n'a-t-elle pas, dans l'état actuel de la science, sa place à côté de la théorie de l'élasticité, qui contredit la réalité de pareils corps ?

Nous croyons donc qu'un examen du rôle joué dans la Mécanique par les principes de la Géométrie présente le plus grand intérêt.

L'édification d'une statique non-euclidienne a été tentée par M. Andrade (1) ; parmi les résultats obtenus, nous citerons

(1) ANDRADE. *Leçons de mécanique physique*. Société d'éditions scientifiques, Paris, 1898.

l'impossibilité paradoxale de réaliser le mécanisme particulièrement simple, constitué par un fil flexible et inextensible. Mais on doit remarquer qu'une telle théorie suppose la généralisation préalable des notions fondamentales : force, équilibre, travail, et que la manière dont peut se faire cette généralisation est en partie arbitraire.

Ces quelques observations, quoique fort imprécises, suffisent à montrer que la portée des questions relatives aux déplacements sans déformation s'étend bien au delà des propriétés des corps solides.

L'INFINI PHYSIQUE. — Nous avons vu que l'idée de l'infini géométrique était essentiellement relative à la notion de distance et pouvait disparaître moyennant certains systèmes de détermination métrique.

De même que nous nous sommes demandé s'il existe une géométrie physique, nous pouvons nous demander si l'idée de l'infini correspond à un fait physique.

On imagine généralement que, si l'on parcourait indéfiniment une ligne droite, on traverserait indéfiniment des mondes plus ou moins semblables à celui dont nous faisons partie.

Il semblerait dès lors que cette idée de l'infini cosmique doive disparaître en même temps que celle de l'infini géométrique.

Cette façon de voir les choses résulte, suivant nous, d'un faux point de vue :

Il est évident d'abord que des considérations sur la notion de distance ne peuvent avoir aucune conséquence pour nos connaissances cosmiques. Celles-ci doivent donc être examinées d'une manière tout à fait indépendante.

Nous avons déjà observé que, dans la science mathématique, les expressions telles que : *infini*, *infiniment petit*, *croissant ou décroissant indéfiniment*, ont des significations rigoureusement et positivement définies, liées à l'importante notion de limite, et qu'elles ne peuvent pas correspondre à des propriétés intrinsèques d'un concept objectif.

L'idée de l'infini cosmique, tout à fait analogue, réside dans celle de la persistance de nos perceptions familières dans un voyage supposé indéfiniment continué dans l'espace.

Cette idée ne repose évidemment sur aucun fait expérimental.

Une notion n'étant plus valable en dehors du domaine de l'observation qui lui a donné naissance, nous ne croyons pas que l'on puisse légitimement donner au mot infini une valeur physique qu'il ne saurait avoir.

La conception de l'univers comme la répétition indéfinie de ce qu'une expérience restreinte nous a fait connaître nous paraît aussi inacceptable que celle qui consisterait à croire que dans un examen des corps solides qui porterait sur des particules de plus en plus petites, persisteraient les propriétés de continuité, d'élasticité, de couleur, etc., relatives à l'observation courante.

Le *prolongement* de nos images représentatives au delà du domaine empirique est une opération familière à l'esprit humain ; mais on sent tout l'arbitraire de ces généralisations transnaturelles, qui sont, je crois, les procédés de création des idées métaphysiques.

V

La Ligne droite.

Définition de la ligne droite. — On a souvent confondu la *définition* de la ligne droite avec l'énoncé de ses propriétés fondamentales, c'est-à-dire de celles d'où se déduisent rationnellement toutes les autres.

Cette confusion est une erreur.

Nous montrerons en effet qu'on peut créer des géométries en prenant pour base des systèmes de lignes choisis arbitrairement dans une large mesure, auxquels nous attribuerons les propriétés du système des lignes droites.

A la base de toute science rationnelle se trouvent des notions primordiales, qu'il est impossible de définir autrement que par le procédé consistant à montrer un objet pour indiquer la signification du mot qu'il représente.

Pour la Géométrie, si l'on conserve les procédés habituels de démonstration des premiers théorèmes, la notion primordiale est évidemment celle du déplacement sans déformation.

On peut bien en énoncer les propriétés fondamentales, comme a cru le faire Helmholtz, comme l'a fait Sophus Lie ; mais