II. — Théorie des vecteurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

exemple, d'être à une distance déterminée d'un point donné, de se déplacer sur une surface ou une ligne *matérielles* données. Pour écrire les équations du mouvement ou celles de l'équilibre, on rend le point *libre* en remplaçant les liaisons par des forces convenables. Il y a lieu de faire intervenir le *frottement*, comme résistance à une tendance au déplacement relatif au contact d'une surface rugueuse, comme proportionnel à la composante normale de la réaction de la surface, comme indépendant de la vitesse relative du déplacement, sauf au départ.

Il faut insister sur ce que *les forces sont indestructibles* en ce sens qu'une réaction ne détruit pas une action — il y a un autre sens qui est plus général et dont il ne peut être question ici — mais il peut arriver qu'un certain nombre des forces appliquées à un point matériel satisfassent aux équations de l'équilibre ; elles ne contribuent pas à donner de l'accélération, et un point matériel est en mouvement rectiligne et uniforme si l'ensemble des forces satisfait aux équations de l'équilibre. De telles forces peuvent être dites équilibrées.

II. — **Théorie des vecteurs.**

Un vecteur est une grandeur géométrique consistant en un segment rectiligne de *longueur* donnée, porté sur une *direction* et dans un *sens* déterminés. On peut au besoin attribuer un point d'application à un vecteur, c'est-à-dire le porter à partir d'un point pris sur sa direction. La somme géométrique des vecteurs équipollents à ceux d'un système et menés par un même point de l'espace est la *résultante générale* de ce système ; elle est la même pour tous les points de l'espace. La résultante des axes des moments des vecteurs d'un système pris par rapport à un point est le *moment résultant* du système par rapport à ce point ; il varie généralement d'un point à un autre.

La théorie des vecteurs a surtout pour objet de déterminer des *systèmes de vecteurs équivalents,* c'est-à-dire ayant même résultante générale et même moment résultant par rapport à un point. Sous ce rapport, on peut transporter un ou plusieurs vecteurs d'un système sur leurs directions respectives ; on peut remplacer des vecteurs dont les directions concourent par un vecteur unique qui est la somme géométrique de ces vecteurs transportés au point de concours; on peut, au contraire, décomposer un vecteur en d'autres dont il est la résultante géométrique et qui ont des directions concourantes avec celle du vecteur considéré ; on peut ajouter ou supprimer des vecteurs qui deux à deux ont une même longueur, une même direction, mais sont de sens contraires (couples nuls); on peut remplacer un vecteur par un autre équipollent en joignant au système un couple dont le moment est celui du vecteur supprimé par rapport à un point de la nouvelle direction.

Les deux théorèmes suivants résultent de ce que le sens de la résultante et celui du moment résultant d'un système de vecteurs changent si l'on change le sens de tous les vecteurs de ce système, et de ce que le moment résultant d'un couple est le même pour tous les points de l'espace.

Si un système de vecteurs a une résultante nulle, son moment résultant est le même pour tous les points de l'espace, comme celui d'un couple : et si ce moment résultant est nul pour un point, il est nul pour tout autre. En effet, au système proposé (l) adjoignons un système de vecteurs $(-l)$ équipollents, mais de sens contraires à ceux du précédent et appliqués en un point pris arbitrairement. La somme géométrique des axes des moments de l'ensemble des couples ainsi formés $(l, -l)$ est constant par rapport à un point quelconque de l'espace. Or la résultante des moments de $(-l)$ est toujours nulle puisque la somme géométrique de ces vecteurs concourants est nul, comme l'est celle des vecteurs (l); il s'en suit que le moment résultant de (l) est égal à celui de $(l, -l)$ et est constant pour tous les points de l'espace.

Si deux systèmes de vecteurs (l) et (l') ont même résultante et même moment résultant par rapport à un point A de l'espace, ils ont même moment résultant par rapport à tout autre point. En effet, changeons le sens de tous les vecteurs de l'un des systèmes, l'ensemble $(l, -l')$ a une résultante nulle et une résultante de moments nulle par rapport au point A, et par conséquent le moment résultant est nul par rapport à un point quelconque..... C'est ce qui caractérise l'équivalence et peut être traduit analytiquement par l'énoncé suivant :

Si les sommes de projections de deux systèmes de vecteurs sont respectivement égales sur trois axes auxquels on les rapporte, ainsi que les sommes (algébriques) de leurs moments autour de ces axes, ils ont mêmes sommes de projections sur un axe quelconque et mêmes sommes (algébriques) de moments autour de celui-ci.

Ainsi peut se résumer l'enseignement habituel sur les vecteurs. A cette théorie se rattachent le centre des distances proportionnelles, le centre de gravité des lignes, des aires, des volumes, grandeurs géométriques ; on peut y rattacher aussi la théorie des polygones funiculaires, dont les ingénieurs se servent pour trouver la résultante générale et le moment résultant d'un système de vecteurs, pour effectuer graphiquement certaines intégrations.

Ce résumé était nécessaire pour faire ressortir l'utilité de la considération des vecteurs. D'abord ils permettent la séparation complète des opérations relatives à la mesure et des raisonnements sur les faits mécaniques. Dans le paragraphe III, un exemple très simple, mais suffisamment démonstratif, fait apparaître nettement ce rôle des vecteurs ; il n'y est pas question de solidification, de transport de forces, de destruction de forces, de systèmes de forces équivalents. Le langage gagne en précision, à notre avis, et même paraît simplifié ; en l'employant, on est moins exposé aux erreurs d'application qu'avec la forme en usage.

Dans l'ignorance où nous sommes de la constitution intime des corps et des lois des forces mutuelles, les vecteurs servent à définir des forces de raison, conformes aux hypothèses sur la nature des corps et telles que l'on réaliserait un grand progrès dans la connaissance de ceux-ci, s'il était toujours possible de vérifier que les forces naturelles et les *forces de défini-*

tion ont des sommes de projections égales sur chacun des trois axes et des sommes de moments égales par rapport à chacun de ces axes. Ce point est trop spécial pour être ici l'objet de quelques développements.

III. — Mécanique des systèmes de points matériels.

D'après les principes énoncés au paragraphe I et pour une première étude sur les systèmes matériels, on considérera ceux-ci comme des ensembles de points matériels exerçant les uns sur les autres des forces répulsives ou attractives, deux à deux égales et contraires sur une même direction, l'action d'un point matériel sur un autre correspondant à une réaction égale et opposée de celui-ci. Les forces mutuelles d'un système sont dites *forces intérieures*. Un système peut être isolé, c'est-à-dire soumis à la seule activité interne; ou, au contraire, il peut être sollicité par des masses extérieures. Celles-ci exercent sur les points du système considéré des forces que l'on nomme *forces extérieures* en raison de leur origine. Ainsi sur chaque point s'exercent des forces intérieures provenant des masses du système et des forces extérieures provenant des masses extérieures; la résultante de ces forces sur ce point détermine à chaque époque l'accélération de son mouvement ou son état d'équilibre.

Un système est en équilibre si tous ses points matériels sont en équilibre et réciproquement. Dans ce cas, pour chaque point la résultante est nulle; la somme des projections des forces agissant sur chaque point est nulle sur trois axes. Si le système se compose de n points matériels, $3\,n$ équations sont *nécessaires et suffisantes* pour écrire que le système est en équilibre.

Ce système d'équations peut être remplacé par un autre équivalent, composé de $3n—6$ des équations entre les forces intérieures et les forces extérieures et de 6 équations indépendantes des forces intérieures, satisfaites par les forces extérieures seules, c'est-à-dire provenant du monde extérieur. Ces dernières sont dites *équations générales de l'équilibre*. Leur établissement est intuitif.