Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR L'IDÉE DE CONGRUENCE
Autor: Bonnesen, T.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7562

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REMARQUES SUR L'IDÉE DE CONGRUENCE

I

1. La géométrie métrique se base généralement sur deux notions fondamentales : distance et angle.

Quand les points ABC sont placés sur une droite dans l'ordre indiqué, on dit que AB est plus petit que AC. Cependant ce n'est qu'une dénomination, une autre manière de dire que B se trouve entre A et C, et en réalité, on n'apprend rien des distances. Un jugement de distance ne s'obtient que quand on est à même de comparer des distances émanant de points différents, ce qui n'est pas le cas ici, où elles émanent toutes du point A. En d'autres termes, il faut fixer ce qu'on veut dire par l'égalité de deux distances.

S'il faut décider en pratique, si deux distances AB et CD sont égales, on se sert d'une échelle. On la place le long de la ligne AB, et vis-à-vis de AB on marque les points P et Q sur l'échelle. Celle-ci est transportée sur la ligne CD, de sorte que P vient en C. Si Q vient en D, on dit que AB = CD. Donc on compare AB avec CD à l'aide de la distance PQ, qui est transportable. Il faut supposer que PQ reste la même pendant la transportation.

2. Voici une question importante. Comment savoir ou plutôt qu'est-ce que veut dire que PQ ne change pas par la transportation? Il s'agit de nouveau de deux distances qu'il faut comparer, PQ avant et PQ après la transportation. Mais on ne peut pas se servir d'une autre échelle pour les comparer.

Cependant jusqu'à certain point on peut juger sans échelle

à l'aide des sens de la vue et du toucher. Personne n'emploiera pour échelle un élastique, parce que celui-ci peut subir des changements visibles pendant la transportation. Mais on n'a pas besoin de procéder à une transportation pour découvrir que ces changements peuvent avoir lieu, comme nous sommes à même de soumettre l'élastique AB à un changement de longueur visible, l'une des extrémités A étant immobile pendant que l'autre se transporte sur la ligne AB. Ce que nous voyons, c'est que l'élastique peut éprouver des changements de longueur, s'il est soumis à l'action de forces extérieures. Jusqu'à certain point on peut dire de chaque corps ce que nous venons de dire de l'élastique. Il n'existe aucun corps qui ne change pas sous l'action d'une pression assez forte, et ces changements seraient-ils trop petits pour pouvoir être découverts directement par les yeux, on les verrait à l'aide d'une comparaison avec un autre corps de la même nature soumis à une pression beaucoup plus petite.

En d'autres termes : Si la longueur d'une barre subit des changements visibles à l'endroit où elle se trouve, nous l'attribuons à l'action de forces extérieures connues, pressions et changements de température.

Si l'on veut construire une échelle, on choisit une substance qui — abstraction faite de la température — ne change en longueur à l'endroit où elle se trouve que quand elle éprouve des pressions très fortes, cela veut dire des pressions plus fortes que celles qu'éprouvera l'échelle pendant la transportation par laquelle se fait la mesure.

On suppose donc que l'échelle pendant la transportation ne puisse changer que sous l'influence des causes qui pourraient produire des changements quand elle est en repos. Donc :

Pour comparer des distances on se sert d'une échelle construite d'une substance qui, restant au même endroit dans l'espace, ne change que sous de fortes actions extérieures. Quand cette échelle est transportée d'un endroit à un autre sans éprouver de telles actions elle conserve par définition sa longueur inaltérée.

3. Il importe maintenant de remarquer que par cette définition, la notion de segments égaux est complètement fixée. Surtout on ne peut pas arbitrairement décider de se servir d'une autre échelle que celle à laquelle on s'est premièrement décidé. Mais en transportant simultanément les deux échelles il faut s'assurer que la seconde est invariable au même degré que la première. Aussi ne peut-on dire d'un corps qu'il est invariable avant d'avoir examiné s'il possède dans tous les sens l'invariabilité de l'échelle.

4. A l'aide de l'échelle on est à même de démontrer l'exactitude des principes suivants applicables à toute mesure.

I. Sur un rayon d'extrémité O on peut déterminer un point P et un seul, de sorte que OP est égal à un segment donné AB.

II. Un segment est égal au segment inverse ($AB = BA$).

III. Quand deux segments sont égaux à un troisième, ils sont égaux entre eux.

IV. Si les points ABC se suivent dans l'ordre indiqué et qu'il en soit de même de $A_1 B_1 C_1$ et si $AB = A_1 B_1$, $BC = B_1 C_1$, on a aussi $AC = A_1 C_1$.

5. Quant à la notion d'angle il nous faut aussi une échelle pour définir les angles égaux, échelle nommée transporteur d'angle. Nous avons à faire les mêmes remarques que sur l'échelle primitive, et sauf le changement nécessaire du nom, on applique aussi aux angles les principes indiqués plus haut (A, B, C étant des lignes passant par le même point, AB, BC, sont des angles. On substitue le rayon au demi-plan).

Nous avons donc maintenant deux appareils de mesure; un transporteur de segment et un transporteur d'angle qu'on ne peut remplacer que par des appareils « ajustés ».

6. Les deux appareils de mesure nous permettent maintenant de prouver l'égalité des lignes et des angles de figures différentes, mais il est d'une grande importance de pouvoir diminuer le nombre de mesures autant que possible. On y parvient à l'aide des propositions de congruence qui disent que certaines lignes et certains angles de deux figures étant égaux, il faut que certains autres le soient aussi.

Par des conclusions directes ou indirectes toutes ces pro-

positions de congruence peuvent être réduites, on le sait, à une seule proposition :

A. Si dans

$$\Delta\ ABC \text{ et } \Delta\ A_1\ B_1\ C_1$$
$$< A = < A,\quad AB = A_1\ B_1\quad AC = A_1\ C_1$$

on a aussi

$$< B = < B_1\quad < C = < C_1\quad BC = B_1\ C_1.$$

On peut examiner l'exactitude de cette proposition à l'aide des appareils de mesure. Soit le triangle ABC dessiné arbitrairement, soient $< A_1$, A_1B_1 et A_1C_1 dessinés égaux à $< A$, AB et AC à l'aide des transporteurs de segment et d'angle. $\Delta\ A_1B_1C_1$ est alors complètement déterminé, et il ne nous reste que de mesurer si $< B_1 = < B$, etc.

7. Dans les cours élémentaires de géométrie on raisonne en général d'une autre manière. On dit :

Quand Δ ABC est transporté de sorte que AB coïncide avec A_1B_1 et que $< A$ est placé dans le plan ABC du même côté de A_1B_1 que $< A_1$, $< A$ coïncidera avec $< A_1$ et par suite AC prend la direction A_1C_1. Dès lors le point C vient nécessairement en C_1 de sorte que Δ ABC et Δ $A_1B_1C_1$ coïncident.

Premièrement nous voyons que la transportation de Δ ABC est pour ainsi dire tout à fait superflue, car il suffit de se servir des appareils de mesure.

Deuxièmement elle n'est pas pratique car il est en général impossible de transporter Δ ABC à coïncidence avec $A_1B_1C_1$.

Troisièmement, et voici l'essentiel, la proposition A ne peut pas être démontrée du tout par la transportation. Car pour qu'elle ait quelque valeur, il va sans dire qu'il doit être sûr que Δ ABC ne subit pas de changements pendant la transportation. Mais comme nous l'avons déjà montré, on n'a qu'un seul procédé pour s'en assurer, c'est de mesurer tous les côtés et tous les angles du Δ ABC et avant et après la transportation. Mais cela prouve précisément que si les triangles coïncident, on est forcé de mesurer les côtés et les angles de tous les deux.

Il en résulte de même qu'il n'est pas correct de donner à la preuve la forme d'une conclusion logique. C'est qu'il est impossible de savoir les changements qu'éprouvera le triangle pendant la transportation. On se dit tacitement qu'il y a des corps invariables, mais en réalité on n'en sait rien qu'après la mesure. En effet, la géométrie applique ici pour la première fois une telle mesure.

La preuve principale de la proposition est du reste la même qui s'applique à tous les principes physiques : La proposition est juste puisque les résultats obtenus en l'appliquant ne sont jamais contradictoires à la réalité.

Le résultat auquel nous sommes arrivés peut être ainsi exprimé :

La preuve ordinaire de la proposition principale de congruence n'est pas fondée sur un raisonnement logique, c'est une preuve expérimentale.

8. Dans l'enseignement élémentaire de la géométrie ce mélange de raisonnement et d'expérience n'est pas sans produire quelque trouble chez l'élève qui réfléchit. Au commencement, avant que l'élève comprenne ce que c'est qu'un raisonnement mathématique logique, ce trouble ne se montre pas, mais la répétition le provoque. En tout cas, il m'est arrivé qu'un élève, arrivé de nouveau à cette preuve, a remarqué qu'elle n'est pas une preuve du tout. En examinant de plus près la question il apparaît que l'avis de l'élève est, qu'en général, nous ne nous servions pas de la transportation dans nos preuves, et qu'il ne peut pas la reconnaître comme matière d'argument. Cette remarque prouve que les cours élémentaires manifestent insuffisamment d'où ils tirent leur matière, c'est-à-dire leurs axiomes.

Quand les élèves vont reproduire une telle preuve de coïncidence, il apparaît aussi qu'il leur est assez difficile de lui donner la forme logique à laquelle aspirent les traités et par suite les professeurs. Ils savent qu'il s'agit de voir si l'un des triangles coïncide avec l'autre ou non, mais non pas si l'on doit commencer par placer l'un ou l'autre des angles à telle place. Et ils ont raison.

II

9. Par les considérations précédentes j'ai voulu démontrer que la preuve ordinaire de la proposition de congruence A est une preuve expérimentale. Mais cela ne démontre pas l'impossibilité de trouver une preuve mathématique. Nous allons maintenant prouver que c'est impossible, c'est-à-dire que la proposition A n'est pas une suite logique des propositions I-IV de la congruence des segments et des angles.

Ou plus précisément :

On peut se figurer une telle mesure de segments et d'angles que la proposition A s'y montrera injuste quoique les propositions I-IV soient justes.

10. Qu'on s'imagine maintenant qu'une personne fasse la mesure non pas en se servant de l'échelle choisie d'abord, mais avec un élastique. Quand celui-ci est transporté d'un endroit à un autre, sa longueur peut changer tout à fait à l'arbitraire, et cela n'établit aucune règle dans la mesure. Mais supposons que pour la transportation le mesureur fasse subir à la longueur de l'élastique des changements bien définis qu'il n'observe pas, mais que notre échelle nous permet de démontrer.

Appelons AB la distance usuelle ordinaire entre A et B en lui donnant le nom de longueur de règle. La distance nouvelle sera appelée (AB) et nommée longueur d'élastique.

Soit O un point fixe. Sur une droite arbitraire passant par O l'élastique sera transporté sans changement de sa longueur de règle, de sorte que P étant un point arbitraire, nous définissons

$$(OP) = OP .$$

Par contre si l'élastique est transporté d'une ligne passant par O à une ligne dont la distance de O est a, il s'allonge de sorte que sa longueur de règle soit multipliée par e^a, e

signifiant un nombre positif plus grand que 1. Donc nous posons :

$$(AB) = (OP)$$

si

$$AB = e^a\, OP,$$

où a est la distance de règle de O à AB. Ou

$$(AB) = e^{-a}.\, AB.$$

On verra facilement que toutes les propositions I-IV sont justes, l'échelle étant seulement multipliée par e^a. Les angles seront mesurés de la même manière qu'auparavant.

Soit POQ un angle droit et $OP = OQ = (OP) = (OQ) = a$. Par P et Q on tire deux lignes parallèles à OQ et OP respectivement, dont l'intersection soit A. Portons sur ces parallèles $(AB) = (OP)$, $(AC) = (OQ)$ c'est-à-dire $AB = AC = e^a a$.

Alors on a $< O = < A$, $(OP) = (AB)$, $OQ = (AC)$ dans Δ OPQ et Δ ABC. Mais (BC) n'est pas égal à (PQ) car

$$(PQ) = e^{-\frac{a\sqrt{2}}{2}},\quad PQ = e^{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}\, a\sqrt{2}$$

$$(BC) = e^{-(a\sqrt{2} + \frac{1}{2} a\sqrt{2}.\, e^a)},\quad BC = e^{-(a\sqrt{2} + \frac{1}{2} a\sqrt{2}.\, e^a)}.\, a\sqrt{2}.\, e^a$$

12. Nous voyons donc qu'à la manière indiquée on peut très bien procéder à des mesurages auxquels s'appliquent les principes I-IV sans que cela signifie qu'une figure peut être transportée de sorte que ses segments restent invariables.

Cette preuve n'est qu'une variation de la preuve de M. Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*. Zweite Auflage, p. 20). Mais elle aurait l'avantage d'être moins abstraite étant basée sur une méthode de mesure plus intuitive.

13. Enfin je montrerai une méthode de mesure qui permet une transportation où tous les segments et tous les angles restent invariables, mais où les principes I et IV ne sont pas corrects.

Supposons maintenant que la longueur de règle de l'élastique ne change pas par une translation, mais que si on le tourne un angle v positif ou négatif, l'une des extrémités étant fixe, il devient multiplié par e^v. (Il faut s'imaginer que l'élastique peut se resserrer à l'infini en tournant dans le sens négatif.)

Les angles sont mesurés comme à l'ordinaire.

Soit ABC un triangle arbitraire. On construit $\Delta\ A_1B_1C_1$ de manière que $< A_1 = < A$, $(AB) = (A_1B_1)$, $(AC) = (A_1C_1)$. Si l'angle de AB à A_1B_1 est égal à v, l'angle de A_1C_1 à AC est aussi égal à v comme $< A_1 = < A$.

En outre on a

$$A_1B_1 = e^v AB, \quad A_1C_1 = e^v AC.$$

Par conséquent Δ ABC est semblable à $\Delta\ A_1B_1C_1$ dans le rapport e^v (au sens ordinaire). Donc

$$A_1C_1 = e^v AC,$$

et comme l'angle de AC à A_1C_1 est v

$$(A_1C_1) = AC.$$

Il en résulte donc que la proposition A est juste. Or on pourrait dire que Δ ABC est transporté sur $\Delta\ A_1B_1C_1$ en conservant tous les segments et tous les angles [1].

La proposition I n'est pas juste. En effet, si l'on fait tourner OP d'un angle $2\,p\,\pi$, P viendra successivement dans une suite de points placés de sorte que $OP = e^{2\pi} \cdot OP_1$, $OP_2 = e^{4\pi} \cdot OP$, etc., mais $(OP) = (OP_1) = (OP_2)$.

La proposition II n'est pas juste. Car l'angle de AB à BA est égal à π de sorte que $AB = BC$, mais $(AB) = e^{\pi} . (BA)$.

On verra facilement que la proposition IV n'est pas correcte non plus.

T. Bonnesen (Copenhague).

[1] On trouve ici trois des groupes de transformation de S. Lie, par laquelle deux points ont un invariant.