UNE LEÇON SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FRACTIONS

Autor(en): **Cailler, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-7551

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UNE LEÇON SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FRACTIONS

L'Arithmétique qui est l'étude des propriétés des nombres et de leurs combinaisons présente un point faible, la théorie des fractions. La plupart des Traités basent cette théorie sur l'introduction d'idées étrangères à l'Arithmétique pure, telles que celles de grandeur continue, de division à l'infini, de mesure, etc. Si cette manière de procéder permet d'aborder promptement les applications, elle est à certains égards très défectueuse. Outre l'inconvénient qu'on vient de signaler, elle crée un dualisme fâcheux, la fraction apparaissant dans les applications tantôt comme un rapport abstrait ou l'indication abrégée d'opérations qui transforment un nombre en un autre, une longueur en une autre, etc., tantôt sous la forme concrète, pour désigner par exemple une longueur, l'expression fractionnaire n'étant dans ce dernier cas qu'un accident dû au choix de l'unité de mesure. De là des idées disparates engendrant fatalement l'obscurité et chez l'élève un sentiment d'insécurité que la pratique du calcul, plus que la réflexion, finit par dissiper.

D'autres auteurs ont simplement défini la fraction comme un couple d'entiers rangés dans un ordre déterminé, puis présenté les règles d'opérations comme des conventions arbitraires dont il suffit de constater après coup la compatibilité; c'est ainsi que procède par exemple M. Tannery dans son excellent Traité [1]. Ce mode d'exposition, assurément très rigoureux, prête le flanc à de sérieuses critiques. Il ne prépare pas aux applications et son caractère formel rebute l'élève qui ne voit guère dans le calcul des fractions qu'un jeu aussi futile et

---

[1] J. Tannery. *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, p. 148 et passim.

moins amusant que les échecs. L'idée, fondamentale en mathématiques, de construire un groupe d'objets assez étendu pour que le symbolisme opératoire s'applique sans exception dans le groupe, échappe par son abstraction à des esprits non préparés qui demandent aux règles du calcul moins la généralité que la convenance pratique.

Un troisième moyen consiste à dépouiller la fraction de tout caractère concret pour en faire un *opérateur*, être nouveau parfaitement défini bien que sans parenté au premier abord avec les nombres entiers non plus qu'avec les grandeurs mesurables, mais pouvant *s'appliquer* aux uns comme aux autres. En poursuivant les conséquences de cette notion parfaitement claire, non seulement on établit d'une manière irréprochable, au double point de vue de la rigueur et de la simplicité, toutes les propriétés des fractions, mais on est bientôt conduit à faire rentrer les entiers eux-mêmes dans le cadre des fractions comme cas particulier; ainsi disparaît le défaut d'unité qu'on pourrait blâmer dans cette façon d'envisager les choses. Malgré la banalité de son point de départ et ses avantages incontestables, cette marche est peu connue et l'ayant adoptée il y a quelques années pour des leçons données dans un établissement d'instruction secondaire, je la croyais nouvelle, lorsque je la trouvai décrite dans le Traité d'Analyse de M. Méray[1]. Je n'ai pas cru cependant devoir renoncer à la publication de cet article, dans l'espoir de contribuer à la vulgarisation d'une méthode qui est restée comme ignorée, mon exposé s'écartant d'ailleurs sensiblement de celui de M. Méray et me paraissant à certains égards plus complet.

Il va sans dire qu'il ne s'agit pas ici d'une leçon réelle; la rapidité, la sécheresse même des développements ainsi que les notations algébriques dont j'ai fait largement usage l'indiquent suffisamment. Je ne m'adresse pas à des élèves mais aux maîtres qui sauront extraire de ces pages les idées utilisables pour l'enseignement oral. Je suppose comme connaissances antérieures les suivantes :

---

[1] MÉRAY. *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale,* t. I, p. 2 et suivantes.

1° Propriétés de l'addition et de la soustraction des nombres entiers.

2° Propriétés distributive, commutative et associative de la multiplication.

3° Définition de la division, du quotient et du reste; propriété distributive de la division, ou théorème en vertu duquel si a et b sont deux nombres divisibles par c, on a $(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$.

4° La notion du plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

§ 1. — Les opérateurs. — Considérons sous le nom d'*opérateurs* des expressions telles que

$$\times a : b \times c \quad \text{ou} : a : b \times c : d \times e$$

où a, b, c,... représentent des nombres entiers ordinaires. Un opérateur indique une succession de multiplications et de divisions qu'il faut exécuter à la suite les unes des autres, dans l'ordre d'écriture de gauche à droite, sur un nombre entier indéterminé auquel l'opérateur est dit *appliqué*, le résultat devant naturellement dépendre du choix de ce nombre. Les opérateurs $\times 1$ et $: 1$ ont un effet nul et peuvent toujours être supprimés.

Le mot *opérateur* exprime une idée plus complexe que celle de *nombre* et les deux notions doivent, pour le moment, être soigneusement distinguées l'une de l'autre. C'est ainsi qu'on ne confondra pas les symboles

$$\times a \quad \text{ou} \times a : b \quad \text{ou} \times a \times b : c,$$

qui sont des opérateurs, avec ceux-ci

$$a, \qquad a : b, \qquad a \times b : c,$$

qui sont des nombres obtenus par certains calculs, les deux derniers, par exemple, en appliquant au nombre a les opérateurs $: b$ et $\times b : c$.

En résumé le champ de l'Arithmétique ne comportait jusqu'à présent que l'étude des propriétés des nombres ; nous étendons son domaine par l'introduction d'un élément nouveau, l'*opérateur* dont il nous faut examiner les propriétés. Parmi celles-ci les unes n'appartiennent point en propre aux opérateurs mais dépendent des nombres auxquels ils sont appliqués; les autres subsistent quels que soient ces nombres. Ce sont ces dernières qui vont attirer surtout notre attention, la théorie des fractions n'étant en somme que l'étude de ces propriétés intrinsèques des opérateurs.

Les nombres a, b, c,... qui figurent dans un opérateur en sont les *facteurs;* ils se partagent en deux classes, les *multiplicateurs* précédés du signe $\times$ et les *diviseurs* du signe :. Un opérateur qui contient des facteurs des deux espèces est *mixte,* il est *simple* dans le cas contraire ; un opérateur simple sans aucun diviseur s'appellera quelquefois *entier.*

Nous emploierons toujours comme ci-dessus les lettres minuscules a, b, m, p, etc. pour désigner les nombres entiers ordinaires, tandis que les opérateurs seront plutôt représentés par les majuscules P, Q, F, G, etc. La notation rP indiquera le résultat obtenu en soumettant le nombre r à l'opérateur P, l'expression Pr étant pour le moment dénuée de toute signification. Par exemple, si P désigne l'opérateur $\times\, a \times b : c \times d : e : f$ et si le nombre r est égal au produit $ncef$, en exécutant les opérations marquées on a d'abord $naefc$, puis successivement $nabefc$, $nabef$, $nabdfe$, $nabdf$, enfin $nabd$; donc $r\mathrm{P} = nabd$. Ce calcul nous donne le théorème suivant d'un usage fréquent.

Théorème I. — Si m, m', m''..., sont les multiplicateurs et d, d', d''..., les diviseurs de l'opérateur P et a le nombre $ndd'd''$..., on a

$$a\mathrm{P} = nmm'm''\ldots,$$

cela quel que soit l'ordre de succession dans P des multiplicateurs et des diviseurs.

Théorème II. — Si p et q sont les résultats obtenus en appliquant l'opérateur P aux nombres a et b respectivement, $p + q$ et $p - q$ sont les résultats obtenus en soumettant les nombres $(a + b)$ et $(a - b)$ à ce même opérateur P. Autrement dit, en supposant possibles les opérations aP et bP, on aura

$$(a \pm b)\ \mathrm{P} = a\mathrm{P} \pm b\mathrm{P}.$$

Soient en effet par exemple $P = : \alpha \times \beta : \gamma \ldots$; partons simultanément des nombres a, b et $(a \pm b)$ et exécutons les opérations : α, $\times \beta$, $: \gamma \ldots$ En vertu de la propriété distributive de la multiplication et de la division, le troisième résultat est à chaque instant égal à la somme (ou à la différence) des deux premiers. Il est vrai qu'on peut être arrêté par une division impossible lorsqu'on calcule aP ou bP ; si aucune impossibilité ne se présente, l'opération $(a + b)$P est nécessairement exécutable et l'on a $(a + b)P = aP + bP$. Il est clair que ce théorème s'étend à un nombre quelconque d'addendes, ainsi

$$(a + b + c\ldots)\ P = aP + bP + cP + \ldots ,$$

en les supposant tous égaux, et leur nombre m, nous avons le

Théorème III. — Si l'opération aP est possible et que m soit un entier quelconque, l'opération (ma)P est également possible et l'on a

$$(ma)\ P = m(aP).$$

§ 2. — Nombres appartenant a un ou a plusieurs opérateurs. — On vient de remarquer qu'un opérateur, s'il n'est pas entier, ne peut pas être appliqué à tout nombre indistinctement. C'est ainsi que l'opérateur $: 2 \times 2$ ne peut être appliqué à aucun nombre impair, la première division marquée étant impossible.

Il existe toujours une infinité de nombres auxquels peut être appliqué un opérateur donné; il existe de même une infinité de nombres pouvant être opérés par plusieurs opérateurs donnés. Le théorème I nous apprend par exemple que le produit de tous les diviseurs figurant dans ces opérateurs, ou un multiple quelconque de ce produit, peut être soumis à chacun d'eux.

Nous dirons qu'un nombre *appartient* ou *correspond* à un opérateur lorsque cet opérateur lui est applicable; nous dirons aussi plus simplement que c'est un *nombre de cet opérateur*. Plus généralement, nous appellerons *nombre commun à plusieurs opérateurs* un nombre auquel ils sont tous applicables. Le plus petit nombre de l'opérateur P, zéro exclus, sera dit *nombre minimum* de P, et nous parlerons de même du *nombre minimum de l'ensemble* P, Q, R..., pour désigner le plus petit nombre, zéro exclus, auquel s'applique chacun des opérateurs P, Q, R...

Théorème IV. — Soient P, Q, R... divers opérateurs et a le nombre minimum de leur ensemble, les autres nombres communs sont multiples de a et réciproquement.

En effet, à cause du théorème III, tout multiple de a est commun à P, Q, R...; en outre si b est un nombre commun quelconque, soient q le quotient de la division de b par a et r le reste, de sorte qu'on a l'égalité $r=b-aq$. D'après le théorème II, r sera commun à P, Q, R..., et comme il est inférieur au minimum commun il ne peut être que zéro, ainsi b est divisible par a.

Théorème V. — Si p, q, r... sont les nombres minima respectifs des opérateurs P, Q, R..., le minimum de l'ensemble P, Q, R... sera le plus petit commun multiple de p, q, r...

Car tout nombre appartenant à l'ensemble doit être multiple de p, de q, de r... séparément, et d'autre part, le plus petit commun multiple appartient à P, à Q, à R..., etc.

Théorème VI. — Si p est le nombre minimum de l'ensemble d'opérateurs P, P′, P″..., q le minimum de l'ensemble Q, Q′, Q″..., r celui de l'ensemble R, R′, R″..., le plus petit commun multiple des nombres p, q, r..., sera le minimum de l'ensemble formé de la réunion des autres P, P′, P″... Q, Q′..., R, R′... Ce théorème se démontre comme le précédent dont il n'est qu'une généralisation.

§ 3. — Egalité et inégalité. — Soient P et Q deux opérateurs, a le minimum commun; nous dirons que P est supérieur, inférieur, ou égal à Q, selon que le nombre aP est lui-même supérieur, inférieur, ou égal à aQ; l'on indiquera la relation de grandeur à la manière ordinaire $P>Q, P<Q, P=Q$.

Si b est un nombre quelconque appartenant à P et à Q, il est multiple de a et l'on a $b=ma$ d'où résulte par le théorème III, que les hypothèses $P \gtreqless Q$ entraînent respectivement les relations $bP \gtreqless bQ$ et réciproquement; autrement dit, pour déterminer le sens de l'inégalité entre deux opérateurs, on peut les appliquer à n'importe quel nombre commun, le résultat de la comparaison sera toujours le même.

Il résulte aussi de là que si $P=Q$ et $Q=R$ on aura $P=R$. En effet, a étant le minimum commun à P, Q, R, les égalités $P=Q$ et $Q=R$ entraînent celles-ci $aP=aQ$ et $aQ=aR$, d'où $aP=aR$ et par suite $P=R$. On démontrera de même que si l'on a $P>Q$ et $Q>R$ on aura aussi $P>R$.

Nous venons de nommer *égaux* des opérateurs ayant le même effet sur leurs nombres communs. Il faut observer qu'étant donnés deux opérateurs égaux un nombre qui appartient à l'un peut ne pas appartenir à l'autre; c'est ainsi que 2 est le minimum de l'opérateur : 2×2 et 1 le minimum de l'opérateur $\times 1$ égal au précédent. Cette circonstance est de nulle importance pour la suite.

Nous identifierons désormais des opérateurs égaux en les regardant comme ayant même *valeur* sous des *formes* différentes. Dès lors les opérateurs forment un ensemble ordonné et peuvent être considérés comme rangés en une seule série par ordre de grandeur croissante ainsi que c'est le cas pour les nombres entiers. Une différence subsiste toutefois : un nombre entier est toujours suivi d'un seul nombre entier tandis qu'il existe toujours une infinité d'opérateurs compris entre deux opérateurs donnés. Cette dissemblance n'a qu'un rôle insignifiant en Arithmétique, mais elle est la source des arguments célèbres des Eléates sur le mouvement. En effet, s'il est aisé de se figurer cet arrangement par ordre de grandeur une fois créé, on n'en peut concevoir la génération complète entre deux termes donnés ou même le prolongement, fût-ce d'un seul échelon, à partir d'un point de départ quelconque. D'une manière générale, il est impossible d'imaginer la description par ordre de grandeur croissante d'un continu ordonné et cependant le temps, conçu suivant l'idée commune comme un pareil continu, la réalise constamment sous nos yeux dans son écoulement naturel. La solution de ce singulier paradoxe, dont quelques mathématiciens semblent aujourd'hui encore méconnaître le véritable caractère, me paraît bien plus du ressort de la psychologie que de la logique.

Théorème VII. — Deux opérateurs qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs multiplicateurs et de leurs diviseurs sont égaux.

En effet, soient $m, m', \ldots$ les multiplicateurs $d, d', \ldots$ les diviseurs de ces opérateurs P et Q. Le nombre $dd'd'' \ldots$ appartient à chacun d'eux et opéré par l'un ou l'autre, il devient $mm'm'', \ldots$ (théorème I), ainsi $P = Q$.

Définition. On nomme *fraction* tout opérateur de la forme $\times n : d$ ou $: d \times n$ qui comprend un seul multiplicateur et un seul diviseur. Nous écrirons la fraction sous la forme usuelle $\frac{n}{d}$, notation qui assigne aux facteurs leur rôle dans l'opérateur sans préciser l'ordre indifférent de leur succession. Le multiplicateur n prend aussi le nom de *numérateur* et le diviseur celui de *dénominateur* de la fraction.

Du théorème précédent résulte ce corollaire que tout opérateur P aux multiplicateurs $m, m', m'', \ldots$ et aux diviseurs $d, d', d'', \ldots$ est égal à la fraction $F = \frac{mm'm'' \ldots}{dd'd'' \ldots}$, car on a évidemment $(dd'd'' \ldots)\, P = (dd'd'' \ldots)\, F = mm'm'' \ldots$ La fraction est donc la forme normale que peut revêtir tout opérateur, les opérateurs entiers n'étant pas exceptés, car on a par exemple $\times a = \frac{a}{1}$ et $\times a \times b \times c = \frac{abc}{1}$. On aura de même $: a = \frac{1}{a}$ et $: a : b : c = \frac{1}{abc}$.

Théorème VIII. — Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre.

En effet la fraction $\frac{mn}{md}$ est identique à l'opérateur $\times n \times m : m : d$, lui-même égal à $\times n : d = \frac{n}{d}$; les deux facteurs intermédiaires se suppriment comme produisant un effet nul. Ainsi une même fraction peut prendre une infinité de formes, la plus simple étant celle où les deux termes sont premiers entre eux. La fraction est dite alors *irréductible*, et deux fractions irréductibles différentes $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont nécessairement inégales comme on le voit en les appliquant au nombre bd qui leur est commun.

L'ordre de grandeur de plusieurs fractions $\frac{n}{d}, \frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''} \ldots$ se détermine facilement en les réduisant au même dénominateur; en désignant par δ le plus petit commun multiple des nombres d, d', d'',..., de sorte que

$$\delta = de = d'e' = d''e'' \ldots,$$

et par k un facteur quelconque, nos fractions s'écriront aussi $\frac{kne}{k\delta}, \frac{kn'e'}{k\delta}, \ldots$ En les appliquant toutes au nombre $k\delta$, on voit que leur ordre de grandeur coïncide avec celui des numérateurs kne, $kn'e'$,...; et si l'on fait grandir k à volonté, on pourra rendre la différence de ces numérateurs aussi grande qu'on voudra, ce qui permettra d'intercaler entre deux termes successifs de la suite $\frac{n}{d}, \frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''} \ldots$ un nombre quelconque de fractions nouvelles.

Remarquons, par exemple, qu'on a $\frac{a}{1} \gtreqless \frac{b}{1}$ selon que $a \gtreqless b$.

§ 4. — Opérations sur les fractions. — Les termes *ajouter*, *soustraire*, *multiplier*, *diviser* et leurs corrélatifs *somme*, *différence*, etc., usités pour les opérations élémentaires entre les nombres entiers, vont désormais nous servir pour désigner certaines opérations analogues exécutées sur les fractions; nous emploierons aussi les mêmes signes pour ces opérations, à savoir $+$, $-$, etc.; une confusion entre l'ancienne et la nouvelle acception des termes n'est pas à craindre, un instant d'attention suffisant pour reconnaître si le mot ou le signe unit deux nombres ou deux opérateurs.

Multiplication des fractions. Lorsqu'on applique deux opérateurs à la suite l'un de l'autre, autrement dit lorsqu'on applique l'opérateur Q au résultat trouvé après application de l'opérateur P, la double opération peut être remplacée par l'application d'un seul opérateur R. Ainsi, si

$$P = : a : b : c \times d \quad \text{et} \quad Q = \times b : a \times d$$

on a

$$R = : a : b : c \times d \times b : a \times d.$$

Nous nommerons *produit* de P et Q cet opérateur R dont l'effet équivaut à l'effet de P et Q pris consécutivement, et nous écrirons $R = PQ$. On dit aussi qu'on a *multiplié* P par Q; ainsi lorsque les opérateurs sont entiers $\times a$ et $\times b$, leur produit sera l'opérateur entier $\times (ab)$.

Cette notion s'étend de suite au produit de plusieurs opérateurs P, Q, R, et c'est ainsi qu'on peut considérer un opérateur tel que : $a : b \times c \times d$, comme le produit de ses divers facteurs : a, $: b$, $\times c$, $\times d$.

Il nous suffira d'étudier la multiplication des opérateurs mis sous la forme fractionnaire.

Théorème IX.— Le produit de diverses fractions $\frac{n}{d}, \frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}\cdots$ est égal à la fraction $\frac{nn'n''\ldots}{dd'd''\ldots}$.

Car le produit cherché, évidemment unique à la forme près, est l'opérateur $\times n : d \times n' : d' \times n'' : d''\ldots$, lui-même égal à la fraction $\frac{nn'n''\ldots}{dd'd''\ldots}$. Il résulte de cette règle que la multiplication des fractions possède les propriétés associative et commutative de la multiplication des nombres entiers.

Division des fractions. Diviser une fraction F par une autre F', c'est en chercher une troisième G, nommée quotient, telle que $F'G = F$. Si G existe il ne peut avoir qu'une valeur, car l'égalité $F'G = F'G'$ donnerait, en désignant par a le minimum commun à l'ensemble F, F', G, G' et posant $aF' = b$, l'équation numérique $a^2 F'G = a^2 F'G'$, ou $(ab) G = (ab)G'$, ou enfin $G = G'$. Or G existe toujours, contrairement à ce qui a lieu dans la division des nombres entiers; en effet, si $F = \frac{n}{d}$ et $F' = \frac{n'}{d'}$ on trouve facilement $G = \frac{nd'}{n'd}$ ce qui donne le

Théorème X. — Le quotient des fractions $\frac{n}{d}$ et $\frac{n'}{d'}$ est $\frac{nd'}{n'd}$.

En particulier si l'on cherche l'opérateur qui appliqué à la suite de $\frac{b}{1}$ produit le même effet que la fraction $\frac{a}{1}$, on trouve la fraction $\frac{a}{b}$. Ainsi toute fraction peut être regardée comme le quotient de son numérateur par son dénominateur, mais il ne faut pas perdre de vue que dans cet énoncé les termes de la division et le résultat lui-même sont considérés comme *opérateurs* et non comme *nombres*. Nous verrons tout à l'heure une définition des fractions plus voisine de l'idée commune.

Addition des fractions. Additionner des fractions F, F′, F″... c'est déterminer une nouvelle fraction G, telle qu'en appliquant celle-ci à un nombre commun quelconque, le résultat soit la somme des résultats donnés séparément par F, par F′, par F″, etc. Ainsi, en désignant par a le minimum commun de F, F′, F″,... G, on doit avoir en particulier

$$aG = aF + aF' + aF'' + \dots \quad ;$$

en outre si l'on représente par b tout autre nombre commun, on a $b = ma$ et, à cause du théorème III, l'équation précédente entraînera cette autre

$$bG = bF + bF' + bF'' + \dots$$

et réciproquement.

Si la somme G existe elle est unique, car l'égalité $a\,G = a\,G'$ donne $G = G'$; en outre on voit immédiatement qu'elle ne dépend pas de la forme des addendes. On peut donc supposer ceux-ci réduits au même dénominateur $F = \frac{n}{d}$, $F' = \frac{n'}{d}$,... etc. ; alors en prenant $b = d$ on conclut la règle suivante.

Théorème XI. — Soient plusieurs fractions $F = \frac{n}{d}$, $F' = \frac{n'}{d}$, $F'' = \frac{n''}{d}$, etc., réduites au préalable au même dénominateur, on a pour leur somme

$$F + F' + F'' + \dots = \frac{n + n' + n'' + \dots}{d} \quad ;$$

par exemple, si $F = \frac{a}{1}$ $F' = \frac{b}{1}$ etc., on a

$$F + F' + F'' \dots = \frac{a + b + c + \dots}{1} \quad .$$

De là dérivent les propriétés de l'addition des fractions.

1° La somme de plusieurs fractions est plus grande que chacune d'elles.

2° L'addition des fractions possède les propriétés commutative et associative de l'addition des nombres entiers.

3° L'addition des fractions possède aussi, vis-à-vis de la multiplication, la propriété distributive ; autrement dit, si $F = \frac{n}{d}$, $F' = \frac{n'}{d}$, $F'' = \frac{n''}{d}$,... et $G = \frac{f}{g}$, sont des fractions quelconques, on a identiquement

$$G(F + F' + F'' + \ldots) = GF + GF' + GF'' + \ldots \quad ;$$

en effet cette égalité n'est autre que la suivante:

$$\frac{f}{g} \; \frac{n + n' + n'' + \ldots}{d} = \frac{fn}{gd} + \frac{fn'}{gd} + \frac{fn''}{gd} + \cdots \quad ,$$

laquelle est évidente d'après les règles précédentes.

Soustraction des fractions. — Soient F et F′ deux fractions, on peut se proposer d'en chercher une troisième qui additionnée à F′ donne F, telle, en d'autres termes, qu'en l'appliquant à un nombre commun quelconque le résultat soit la différence des résultats donnés par F et F′.

Pour la possibilité de l'opération il faut évidemment que $F > F'$, cette condition est évidemment suffisante et en supposant les deux fractions F et F′ réduites au même dénominateur, on obtient le

Théorème XII. — Si F et F′ sont deux fractions réduites au même dénominateur $F = \frac{n}{d}$ et $F' = \frac{n'}{d}$, leur différence est

$$F - F' = \frac{n - n'}{d} \; .$$

Ainsi, si $F = \frac{a}{1}$ et $F' = \frac{b}{1}$, on aura $\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a - b}{1}$.

Remarquons encore que la soustraction possède la propriété distributive vis-à-vis de la multiplication ; autrement dit, on a l'identité facile à vérifier

$$G(F - F') = GF - GF' \; .$$

Multiplication et division des fractions par un nombre entier. Cette opération n'a point été définie jusqu'ici. En ce qui concerne la multiplication numérique, on nomme produit par l'entier m l'addition de m addendes égaux ; il est naturel d'étendre l'emploi du même terme aux fractions et de nommer *produit* de la fraction $\frac{n}{d}$ *par l'entier* m l'addition de m addendes tous égaux à $\frac{n}{d}$. La règle d'addition donne alors

$$\frac{n}{d}\, m = \frac{n\, m}{d} \quad ;$$

la multiplication par l'entier m est donc au fond la même chose que la multiplication par la fraction $\frac{m}{1}$, comme on le reconnaîtrait au reste *a priori* par l'analyse des notions.

De même diviser une fraction F par l'entier m sera déterminer une nouvelle fraction G telle que $Gm = F$ et si $F = \frac{n}{d}$, on trouve $G = \frac{n}{md}$. Ainsi la division par l'entier m revient à la division par la fraction $\frac{m}{1}$.

Il résulte de ces remarques que la fraction $\frac{n}{d}$ peut être considérée comme égale à n fois la fraction $\frac{1}{d}$, ou aussi comme d fois plus petite que la fraction $\frac{n}{1}$; ainsi

$$\frac{n}{d} = \frac{1}{d}\, n = \frac{n}{1} : d$$

ce qui est conforme à l'idée commune.

§ 5. — Remarques. — Nous avons défini toutes les opérations, ainsi que les relations de grandeur, en ne nous occupant jamais que des fractions ou opérateurs à l'exclusion des nombres entiers. Toutefois les propriétés des opérateurs entiers $\frac{a}{1}$, $\frac{b}{1}$ etc., se sont trouvées toujours identiques à celles des nombres correspondants $a, b, \ldots$ et si l'on fait abstraction de la nature des objets pour n'avoir plus égard qu'au mécanisme du calcul, on évitera des complications inutiles en assimilant simplement les uns aux autres $\frac{a}{1}$ avec a, etc. L'Arithmétique n'a plus alors affaire qu'à un seul élément le *nombre ra-*

tionnel qui comprend deux variétés, l'entier et la fraction; ce que nous avons dit suffit pour faire sentir qu'il ne résultera jamais de cette identification aucune erreur ou embarras quelconque. De là certaines expressions au premier abord singulières telles que multiplier un nombre entier m par une fraction $\frac{n}{d}$ au lieu de multiplier une fraction $\frac{m}{1}$ par une autre $\frac{n}{d}$ ou appliquer, si possible, l'opérateur $\frac{n}{d}$ au nombre m. Il suffira dans tous les cas au calculateur de savoir reconnaître la nature de son résultat, autrement dit si c'est un nombre, ou au contraire un opérateur.

Cette identité de propriétés de deux êtres aussi différents est assurément remarquable; bien que due à une espèce de hasard on la retrouve dans d'autres parties des mathématiques. C'est ainsi qu'en Géométrie les vecteurs qui sont des quantités réelles, peuvent être considérés comme cas particulier d'opérateurs spéciaux nommés les quaternions.

Dans la plupart des problèmes qu'on est appelé à résoudre en pratique les fractions sont appliquées non à des *nombres entiers* mais à des *grandeurs continues* considérées comme indéfiniment divisibles en parties égales. Nous ne pouvons pas entrer ici dans l'examen détaillé de toutes les questions souvent fort délicates qui se posent à l'occasion de ces grandeurs, mais il importe de rechercher si les propriétés des fractions dépendent, ou non, des grandeurs auxquelles on les applique.

Il nous suffira à cet effet de remarquer que toutes les grandeurs continues sont conçues sur le modèle de la *ligne* ou *distance géométrique* de deux points. L'addition géométrique des distances participe aux diverses propriétés de l'addition arithmétique des nombres (commutation et association des addendes), et il en résulte que si l'on considère plusieurs longueurs commensurables λ, λ', λ'',... en nombre fini, elles peuvent être représentées comme des multiples entiers l, l', l'',... de l'une de leurs communes mesures. Les opérations géométriques, addition, soustraction, multiplication et division par des entiers, exécutées sur les longueurs λ, λ', λ'',... correspondent homothétiquement aux opérations arithmétiques de même nom exécutées sur les entiers l, l', l'',... Il va résulter de là que les fractions ont les mêmes propriétés lorsqu'on les applique à une grandeur λ ou à un nombre.

En effet si λ est une ligne et λ P ce qu'elle devient soumise à l'opérateur P; si, d'autre part, F, F′, F″,... G sont diverses fractions avec l comme minimum commun, les hypothèses $F \leqq F'$, ou $G = F + F' + F'' + \ldots$, ou enfin $G = FF'F''\ldots$, donneront les égalités numériques

$$l\,F \leqq l\,F'$$
$$l\,G = l\,F + l\,F' + l\,F'' + \ldots$$
$$l\,G = ((l\,F)\,F')\,F''\ldots$$

auxquelles correspondent, quand on divise la ligne λ en l parties égales, les propriétés géométriques

$$\lambda\,F \leqq \lambda\,F'$$
$$\lambda\,G = \lambda\,F + \lambda\,F' + \lambda\,F'' + \ldots$$
$$\lambda\,G = ((\lambda\,F)\,F')\,F''\ldots$$

ce qu'il fallait démontrer.

On nomme *rapport* de deux grandeurs λ, λ' commensurables entre elles la fraction qui transforme la seconde en la première, et *valeur numérique* de la grandeur λ son rapport à la grandeur arbitraire choisie comme unité; il est clair que le rapport de deux grandeurs λ et λ' est aussi égal au quotient de leurs valeurs numériques. C'est le fait de l'existence des grandeurs incommensurables qui nécessite en Arithmétique l'introduction ultérieure de nombres nouveaux, les nombres *irrationnels*.

J'ajoute que la fraction se présente toujours en Géométrie comme l'indication d'une opération à exécuter sur une certaine ligne mais que, dans l'usage courant de la langue, et là où aucune confusion n'est à craindre, on la considère tout aussi fréquemment comme le résultat de cette opération. C'est dans ce sens qu'on parle en pratique de 3 m. 75 par exemple.

C. Cailler (Genève).