

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES PARALLÈLES BASÉE SUR UN POSTULAT PLUS ÉVIDENT QUE CEUX EMPLOYÉS ORDINAIREMENT
Autor: Dassen, C.-C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7553>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA THÉORIE DES PARALLÈLES

BASÉE SUR UN POSTULAT PLUS ÉVIDENT QUE CEUX EMPLOYÉS
ORDINAIREMENT

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES. — L'impossibilité d'établir la Théorie des parallèles sans introduire dans la Géométrie un nouveau postulat, destiné à déterminer une espèce dans la classe qui correspond aux autres postulats plus généraux de cette science, est depuis quelques années un fait définitivement acquis. La Métagéométrie est arrivée à reléguer les chercheurs actuels de la démonstration du postulat d'Euclide au même rang que ceux qui épuisent leur énergie dans la recherche de la quadrature du cercle ou du mouvement perpétuel; elle a démontré que le postulat en question n'est pas une conséquence des autres postulats, et que, partant, il n'est pas réductible en ceux-ci.

Certes, pour ceux qui n'ont pas pénétré ou compris l'enseignement et les résultats de la Métagéométrie, il en coûte de renoncer à la recherche de la démonstration, car il leur suffit, pour se résoudre à continuer leurs investigations, de se faire la réflexion suivante: « comment peut-on soutenir qu'il pourrait se faire que par un point pris sur un plan, on pût mener une infinité de droites n'en rencontrant pas une autre située dans le même plan, ou que la somme des angles d'un triangle ne fût pas égale à deux droits? Cela doit être ou ne pas être, mais cela ne saurait dépendre de la fantaisie de personne »¹. Ne nous étonnons pas, après cela, qu'il y ait encore des gens qui recherchent la démonstration du fameux postulat; mais, nous l'avons dit, il n'y a actuellement plus de doutes à ce sujet; aussitôt qu'on arrive à la Théorie des parallèles, on est obligé d'introduire dans la géométrie ordi-

¹ Voir G. LECHALAS. *Etude sur l'Espace et le Temps.*

naire un postulat nouveau qui la distingue des géométries nommées non-euclidiennes.

Ce postulat est ordinairement connu sous le nom du géomètre grec Euclide, le premier qui semble l'avoir introduit; mais souvent on le formule d'une façon différente de celle qu'employa celui qui, avec Hipparque, donna tant d'éclat à l'École d'Alexandrie et aux règnes des premiers des Lagides. Euclide énonça son postulat ainsi :

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits¹.

Or, on simplifie considérablement le langage tout en donnant au postulat un sens très net et facile à saisir en l'énonçant ainsi :

Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule droite qui ne rencontre pas une autre droite coplanaire également donnée.

On peut dire aussi :

Deux droites, une oblique et l'autre perpendiculaire à une droite donnée, dans un plan, se rencontrent nécessairement.

Ou bien encore comme Legendre :

La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Il est aisé de se convaincre que ces quatre énoncés sont équivalents, mais il est aussi manifeste qu'ils possèdent un différent degré d'évidence; le dernier a tout l'air d'un théorème à démontrer, et de fait il a été toujours considéré comme tel; le premier n'a pas le même caractère, mais il n'en vaut guère mieux étant encore trop compliqué.

Si l'on avait à choisir, on pourrait opter entre le deuxième ou le troisième énoncé.

Mais encore, possèdent-ils le degré d'évidence que l'on doit exiger d'un axiome géométrique? il n'y a pas à balancer pour répondre. Prenons par exemple le troisième énoncé; pour si peu que l'on réfléchisse sur ce qu'il avance, on est aussitôt assailli par ce doute: qui nous assure que la rencontre des deux droites se vérifiera lorsque cette rencontre, si elle existe,

¹ *Les Eléments de Géométrie d'Euclide*, traduction de F. Peyrad. Page 6, 1804.

se produit au delà du champ où il nous est permis d'opérer ? Assurément, l'expérience nous fait voir que si l'angle aigu que fait l'oblique ne dépasse pas une certaine valeur, la rencontre a lieu, puisqu'il nous est possible de la constater dans notre champ d'observation ; mais cette preuve nous manque quand l'angle aigu commence à s'approcher d'un angle droit, c'est-à-dire au moment le plus important, car l'on sait que quand cet angle devient droit, la rencontre est impossible. Lors même que l'on disposerait d'appareils d'une perfection indéfinie, qui nous permettraient d'observer un rapprochement entre les deux droites pour un angle aigu si peu différent d'un droit à volonté, on ne serait pas autorisé à affirmer la rencontre de ces deux droites, car rien ne nous prouve que deux droites ne peuvent se rapprocher indéfiniment, comme un arc d'hyperbole de très grande excentricité (lequel ressemble, à s'y méprendre, à un segment de droite) avec son asymptote.

La même argumentation peut s'appliquer aussi au dernier énoncé ; aucune expérience ne peut nous conduire à accepter ce que ce postulat établit et partant, il lui manque, ainsi qu'aux autres énoncés, le degré d'évidence qu'on doit exiger d'un axiome géométrique.

Il convient donc de chercher un énoncé du postulat fondamental de la théorie des parallèles, possédant un plus grand degré d'évidence. Mais auparavant il est bon de se demander si la définition que l'on donne aux droites parallèles est irréprochable, car s'il est vrai que les définitions de mots sont arbitraires, encore faut-il qu'elles impliquent la possibilité de l'objet défini, ainsi que l'expérience de ce même objet. Deux droites parallèles, dit-on, sont celles qui, tout en étant dans un même plan, ne peuvent se rencontrer si loin qu'on les prolonge.

Or comment vérifier si cela a lieu, excepté dans des cas très spéciaux ? Cette définition ne nous donne non plus aucune idée de la manière dont se comportent les deux droites à mesure qu'on les prolonge ; se rapprochent-elles ou s'éloignent-elles indéfiniment ? Se maintiennent-elles à la même distance ? Il est vrai que le postulat que l'on introduit ensuite élimine ce dernier doute, mais encore ce postulat doit être

tiré de l'expérience, et partant, il ne pourra jamais offrir le degré d'évidence voulue, si la définition donnée aux droites parallèles rend cette expérience impossible. On est donc porté à établir que si les énoncés des postulats cités plus haut ne possèdent pas l'évidence que l'on doit exiger d'un axiome géométrique, c'est que la définition donnée aux droites parallèles rend cette qualité impossible. Ce n'est donc pas une définition heureuse, et du reste elle n'est pas d'accord avec le sens étymologique du mot défini (*παράλληλος*, *ον*) qui signifie, en regard, à côté l'un de l'autre (*παρα*, à côté *αλληλος*, l'un de l'autre) et qui correspond mathématiquement au terme *équidistant*; or s'il est vrai que deux droites qui se maintiennent à la même distance (en supposant un sens précis à ce mot) ne peuvent assurément se rencontrer, il ne s'en déduit pas que deux droites coplanaires qui ne se rencontrent pas doivent nécessairement se maintenir à la même distance; donc, la définition dit plus que l'étymologie du mot défini. Du reste ce manque de conformité absolu entre le sens que l'on donne à un mot et celui de son étymologie n'est pas exclusif à notre cas, au contraire, c'est un fait presque général et du reste assez indifférent, aussi, si nous le citons ici c'est moins pour le faire ressortir que parce que justement la solution de la difficulté qui nous occupe s'obtient en conservant au mot parallèle sa signification étymologique. Les droites parallèles seront définies comme des droites *équidistantes*, toutefois après avoir précisé le sens mathématique de l'équidistance de deux droites.

Fleury est, à ma connaissance, le premier qui ait mis la main sur la solution de la difficulté. Dans son opuscule *La Géométrie affranchie du postulat d'Euclide* il appelle droites parallèles, des droites équidistantes et il dit: « Si Euclide avait posé cet axiome: *Lorsque deux droites situées dans le même plan se rapprochent dans un sens, elles s'éloignent dans le sens opposé*, il est certain que personne ne l'aurait contesté, et comme on en déduit facilement qu'une droite peut avoir tous ses points à égale distance d'une autre, notre théorie des parallèles se trouverait ainsi à l'abri de tout reproche. « Je ne connais aucun traité de Géométrie qui, de-

puis lors, ait suivi de si justes observations, ni qui en ait même fait mention, aussi est-ce avec une légitime satisfaction que j'ai vu que M. de Freycinet, dans son récent ouvrage *L'Expérience en Géométrie*, se rallie à la formule de Fleury (quoiqu'il ne cite pas cet auteur). L'autorité de M. de Freycinet permet de supposer que ce postulat, ainsi accepté, aura l'avenir qui lui correspond. Les avantages que l'on obtiendra en l'adoptant sont les suivants :

D'abord, son énoncé permet un contrôle expérimental, il n'exige pas de sortir de notre champ ordinaire. Etant données deux droites coplanaires, nous menons par divers points de l'une d'elles des perpendiculaires à l'autre et nous mesurons les segments de ces perpendiculaires compris entre l'une et l'autre droite, nous constatons que si, en marchant dans un sens, par exemple de gauche à droite, ces segments commencent à augmenter de longueur, il n'arrivera jamais que cette longueur commence ensuite à diminuer ou demeure constante. Aucune expérience ne venant contredire cette loi, on est naturellement, et sans aucune difficulté, porté à l'accepter comme évidente, qu'elles que soient les droites, et pour n'importe quelle grandeur du champ. C'est justement ce qui n'arrivait pas avec les autres énoncés du postulat fondamental, entre autres celui donné par Euclide, car tous ces derniers impliquent la notion de l'infini partant de l'indéterminé, notion qui rend impossible l'expérience.

Un autre avantage du nouveau postulat, c'est qu'on en déduit aisément l'existence de droites équidistantes, c'est-à-dire telles que tous les points de l'une sont à égale distance de l'autre ; or, ces droites, que l'on nommera *parallèles*, impliquent un concept bien plus familier que celui qui sert à définir, sous ce nom, des droites qui ne peuvent se couper si loin qu'on les prolonge. Duhamel¹ dit à ce sujet : « A quel enfant ne s'est pas présentée l'idée de deux droites partout également distantes ? » L'auteur cité plus haut dit aussi² : « Qu'on demande à une personne peu familiarisée avec les spéculations géométriques et qui en connaît seulement les

¹ *Les méthodes dans les Sciences de Raisonement*, tome II, page 306.

² FREYCINET. *De l'expérience en Géométrie*, page 49.

idées générales, qu'on lui demande de tracer deux parallèles. Elle n'aura pas d'hésitations. Après avoir décrit une première droite, elle s'appliquera, si elle n'a à sa disposition qu'une règle, à placer celle-ci de manière qu'elle ne penche ni d'un côté ni de l'autre, ou que, sur sa longueur, elle lui paraisse à la même distance de la droite tracée. Pour cette personne, deux parallèles se reconnaissent à ce signe qu'elles sont partout à la même distance.

Finalement avec cette définition de droites parallèles on évite une singulière anomalie dans la méthode de la géométrie élémentaire. En effet, toutes les définitions qui se rencontrent dans les textes : angles, perpendiculaires, bissectrices, médianes, etc., etc., se représentent dans le fini, quoique quelques-uns de ces faits géométriques puissent s'étendre indéfiniment ; pour les comprendre et les étudier il nous suffit de notre champ d'observation. En arrivant à la théorie des parallèles, la méthode change brusquement, on fait intervenir l'infini, c'est-à-dire l'indéterminé ; l'expérience est rendue impossible, notre champ d'observation ne sert plus à rien, de sorte que, rigoureusement parlant, sauf des cas très spéciaux, il n'y a plus d'évidence possible. Cela n'arrive pas en définissant le parallélisme par l'équidistance.

Indiquer de quelle manière la Théorie des parallèles peut être présentée dans l'enseignement de la géométrie élémentaires euclidienne, en prenant comme point de départ le nouveau postulat indiqué, — tel est l'objet de cette contribution. Il est vrai que Fleury l'a déjà fait, mais, pour plusieurs raisons, son exposé laisse à désirer ; d'abord il est trop compliqué, — grave défaut, — ensuite, le postulat n'est pas explicitement énoncé dans le texte ; finalement, dans sa préoccupation de trouver faux le postulat d'Euclide, il omet de parler des droites fixes coplanaires qui ne se rencontrent pas, de sorte qu'il laisse vide dans sa Géométrie tout ce qui se relationne avec ces sortes de droites. En un mot, il ne démontre pas l'équivalence du nouveau postulat avec celui d'Euclide ; or, il est juste d'observer à ce sujet que, en parlant du postulat du géomètre, on démontre que les droites fixes coplanaires qui ne se coupent pas, sont équidistantes,

donc, inversement, en partant du nouveau postulat il y a tout intérêt à démontrer que toute droite fixe qui ne coupe pas une autre coplanaire également fixe, est nécessairement parallèle à celle-ci dans la nouvelle acception du mot, c'est-à-dire qu'elles sont équidistantes. — Une fois cette parfaite équivalence des deux postulats démontrée, il n'est plus nécessaire de remanier la partie de la théorie des parallèles, telle que l'a laissée Euclide, dans ce qui suit cette démonstration. Comme le concept de droites fixes coplanaires qui ne se rencontrent pas si loin qu'on les prolonge, est sans contredit plus général, en principe, que celui de droites équidistantes, il y a tout intérêt à ramener au plus tôt la théorie nouvelle à l'ancienne.

Dans notre exposé, nous avons justement complété et perfectionné l'œuvre de Fleury; comme l'on verra, c'est bien ce qu'il y a à remanier pour baser la Théorie des parallèles sur le nouveau postulat, aussi, nous aimons à croire que les auteurs futurs de textes de Géométrie n'auront aucune raison sérieuse pour ne pas accepter la réforme, surtout à des époques où l'étude des postulats fondamentaux de la Géométrie a été poussée si loin.

Ces explications données, nous entrons en matière.

EXPOSÉ — 1. L'expérience nous démontre que, étant donné deux droites fixes dans un plan, si l'on mesure les distances des points de l'une des droites à l'autre droite, et que l'on constate que ces distances commencent à augmenter ou diminuer, elles continueront à varier de la même manière, pourvu que l'on marche dans un même sens. On peut donc établir :

POSTULAT FONDAMENTAL. *Dans un plan, une droite qui a commencé par s'éloigner d'une autre, ne peut pas ensuite s'en rapprocher, et réciproquement.*

THÉORÈME I. — D'après cela, considérons deux droites a et b perpendiculaires à une troisième c ; le segment MN de c (fig. 1) compris entre a et b indique évidemment la distance du point M à la

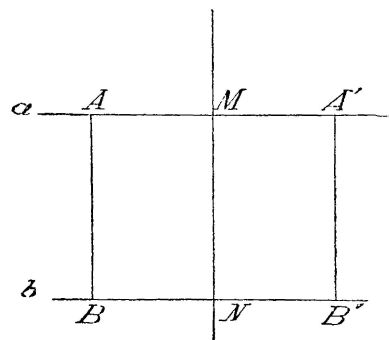


Fig. 1.

droite a et du point N à la droite b . Nous allons démontrer que la distance AB d'un point quelconque A de l'une des droites, la a par exemple à l'autre droite, est nécessairement égale à MN ; supposons que $AB < MN$; doublons la figure autour de c comme axe jusqu'à ce que la partie gauche du plan vienne sur la droite; les droites a et b étant perpendiculaires à l'axe de rotation, le point B viendra en B' , le point A en A' , de telle manière que l'on ait $AM = A'M$, $BN = B'N$; la droite $A'B'$ étant perpendiculaire, au point A' , à la droite a , et du moment que l'on a aussi $A'B' < MN$, il en résulterait que la droite a , du point A au point M aurait commencé par s'éloigner ou s'approcher de la droite b , tandis que du point M au point A' elle se serait approchée ou éloignée; or, ceci est contraire au postulat fondamental; donc il faut que $AB = MN$. Il résulte par conséquent que tous les points de l'une quelconque des droites a ou b sont équidistant de l'autre droite. Deux droites satisfaisant à ces conditions seront nommées *équidistantes* ou *parallèles*. Donc : *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.*

THÉORÈME II. — *Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une d'elles l'est aussi à l'autre.*

Supposons que les droites a et b soient *parallèles* ou *équidistantes*, il s'agit de démontrer que toute droite c par exemple (fig. 1) qui est perpendiculaire à l'une d'elles, b par exemple, au point quelconque N est aussi perpendiculaire à l'autre. Prenons de chaque côté de N les points B et B' à égale distance de N , menons ensuite les perpendiculaires BA et BA' à la droite b ; puisque les droites a et b sont parallèles, on aura $AB = A'B'$. Donc si l'on fait tourner la figure autour de c , comme au théorème antérieur, le point A se confondra avec A' ; donc, les angles NMA et NMA' sont égaux et les droites a et c sont perpendiculaires.

COROLLAIRE. — *Deux droites b et c parallèles à une troisième d sont parallèles entre elles.* Car, si l'on mène la droite m perpendiculaire à d , cette droite est, en vertu du théorème démontré plus haut, perpendiculaire aux droites b et c ; donc ces deux dernières sont parallèles (Théorème I).

2. Le théorème II précise le sens mathématique du concept

d'équidistance de deux droites; le fait pour ces sortes de droites, d'avoir des perpendiculaires communes, et des segments égaux de celles-ci compris entre les deux droites, justifie le nom qu'on leur a donné.

THÉORÈME III. — *Deux droites fixes coplanaires qui ne peuvent se rencontrer, si loin qu'on les prolonge, sont nécessairement équidistantes ou parallèles.*

Supposons que les droites fixes a et b (fig. 2) ne puissent, pour une raison quelconque, se rencontrer si loin qu'on les prolonge, il s'agit de prouver qu'elles doivent forcément être équidistantes. En effet, supposons qu'elles ne le fussent,

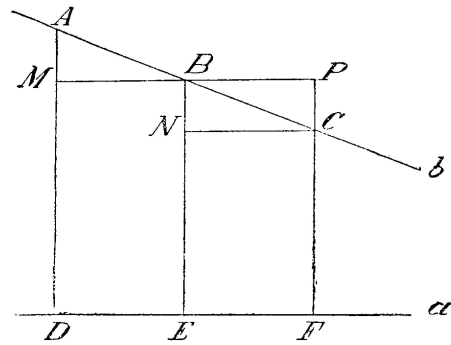


Fig. 2.

tels que leurs distances AD, BE à l'autre droite seraient inégales; supposons que $AD > BE$; alors, d'après le postulat fondamental, si l'on prend une distance $EF = DE$ et que l'on tire la perpendiculaire FC à la droite a , il faut que l'on ait $EB > CF$; donc, si des points B, C on mène les perpendiculaires MP, CN aux droites parallèles AD, BE, CF (théorème II), le point N tombera entre B et E , puisque, les droites NC et EF étant parallèles, on doit avoir $CF = NE$. Du parallélisme des droites MP et NC (théorème I) on tire $BN = PC$; mais $BP = NC = EF = DE = MB$; donc les triangles BCN et BCP sont égaux (ils ont les trois côtés respectivement égaux); donc l'angle $BCN =$ l'angle $CBP =$ l'angle ABM . Les triangles rectangles ABM et BCN ayant un angle aigu et un côté égaux, sont égaux, et on en déduit que $AM = BN$. La droite b s'approche donc de la droite a de quantités égales AM, BN , pour des distances égales DE, EF prises sur la droite a et comme ces droites sont fixes, elles finiront nécessairement par se rencontrer, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3. De ce théorème il résulte que nos droites équidistantes ou parallèles sont bien les droites parallèles telles qu'on les définit ordinairement. La Théorie des parallèles peut donc se continuer comme le fit Euclide, en donnant au mot paral-

lèle, le sens que lui donna celui-ci. Naturellement le postulat ancien est maintenant un théorème à démontrer; nous le ferons en employant l'énoncé le plus simple.

THÉORÈME IV. — *Dans un plan, par un point donné, on ne peut mener qu'une droite parallèle, c'est-à-dire qui ne puisse rencontrer une autre droite également donnée.*

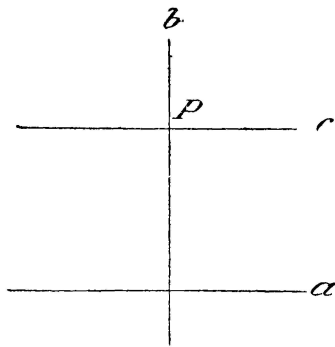


Fig. 3.

Soit le point P et la droite a (fig. 3). Il est évident, tout d'abord, que l'on peut mener par P une droite de cette espèce, car, il suffit de tirer la perpendiculaire b à la droite a par P , puis, par le même point, la perpendiculaire c à b . Les droites a et c sont parallèles d'après les théorèmes I et III. Mais, cette droite est unique, car d'après le théorème II,

une autre droite quelconque qui remplirait cette condition devrait être aussi perpendiculaire à la b au point P , comme la perpendiculaire c est unique, le théorème est démontré.

CONSIDÉRATIONS FINALES. — La théorie basée sur le nouveau postulat comporte donc un théorème de plus que la théorie ordinaire, c'est le théorème III, car le théorème IV est compensé par le postulat fondamental que l'on n'est pas obligé de démontrer comme dans la théorie ordinaire. Mais de cette augmentation d'un théorème — d'une démonstration très simple du reste — on est amplement dédommagé par la plus grande évidence obtenue en adoptant le nouveau postulat; il y a tout intérêt, par conséquent, à adopter ce dernier.

En arrivant à la Géométrie dans l'espace, il convient, pour être logique, de suivre l'ordre suivant : avant de définir les plans parallèles, on devra établir les propriétés des plans et des droites perpendiculaires. On fera voir ensuite que si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, la distance d'un point quelconque de l'un d'eux à l'autre est constante et égale au segment de la perpendiculaire donnée comprise entre les deux plans. Cette démonstration se fera aisément au moyen de plans auxiliaires que l'on fera passer par la perpendiculaire en question, et en se basant sur le théorème I. On dira alors : *deux plans qui réunissent ces conditions,*

c'est-à-dire tels que tous les points de l'un quelconque se trouvent à la même distance de l'autre, seront nommés plans équidistants ou parallèles.

On démontrera ensuite, par un même procédé, que si deux plans sont équidistants, toute droite perpendiculaire à l'un d'eux l'est aussi à l'autre (on se basera sur le théorème II).

On en déduira comme corollaires que deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux, et que par un point donné on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un autre également donné.

Si deux plans fixes sont équidistants, toute droite située sur un de ces plans a évidemment tous ses points équidistants de l'autre plan. Une droite et un plan qui se trouvent réunir cette condition d'équidistance seront nommés *droite et plans équidistants ou parallèles.*

Finalement, en se basant sur le théorème III on démontrera que si deux plans fixes, ou une droite et un plan fixes, ne peuvent se rencontrer si loin qu'on les prolonge, ils sont nécessairement équidistants, ce qui permet de généraliser le second des théorèmes (celui relatif à deux plans équidistants). On dira : si deux plans fixes ne peuvent se rencontrer, si loin qu'on les prolonge, toute droite perpendiculaire à l'un d'eux, l'est aussi à l'autre ; et de même pour les deux corollaires.

Le reste de la théorie se poursuivra comme d'habitude en tenant compte de la nouvelle propriété plus générale du parallélisme, lequel implique à présent, non seulement l'équidistance mais aussi la non rencontre, sans autre condition des droites ou plans fixes qualifiés sous le nom de parallèles.

Pour ne pas choquer les habitudes, il serait peut-être plus convenable de conserver au mot *parallèle* le sens qu'on lui a toujours donné ; et alors, on n'emploierait que le mot *équidistant* jusqu'à ce que l'on ait démontré le théorème III ; à ce moment on continuerait avec le mot *parallèle*. De même dans la Géométrie dans l'espace.

Telle est, à mon avis, la manière dont il convient, aujourd'hui, de présenter la Théorie des parallèles dans l'enseignement de la géométrie euclidienne élémentaire.

C.-C. DASSEN (Buenos-Ayres).